

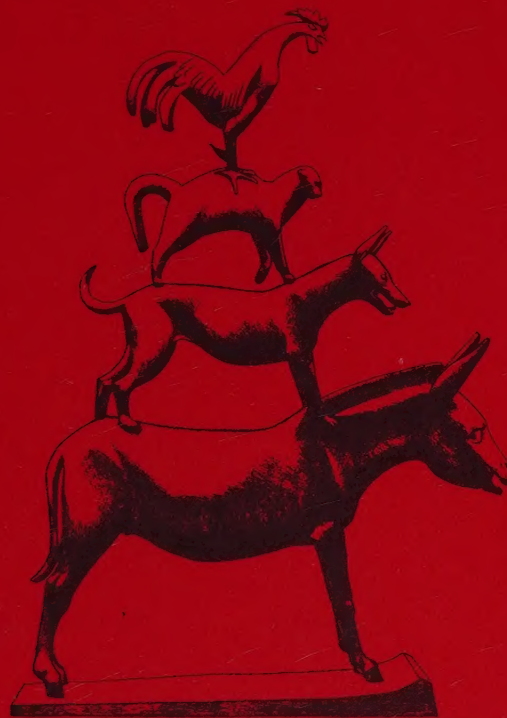
UNIVERSITÄT BREMEN

ZUR TOPOLOGIE DES
RAUMES LINEARER KONTROLLSYSTEME

Uwe Helmke

Report Nr. 100

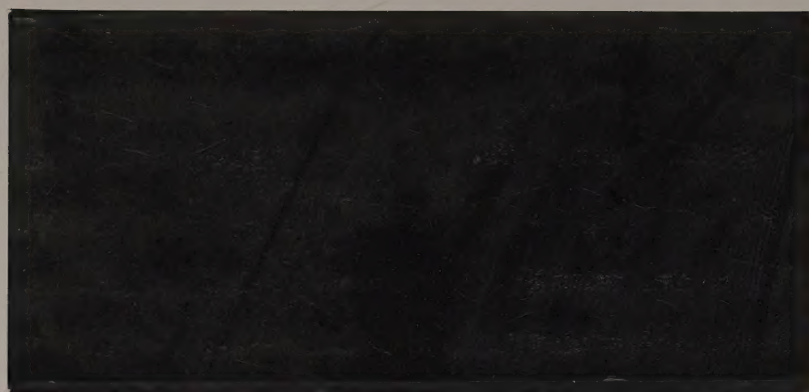
1982
Februar 1983



Forschungsschwerpunkt Dynamische Systeme

Fachbereiche
Mathematik/Informatik
Elektrotechnik/Physik





ZUR TOPOLOGIE DES
RAUMES LINEARER KONTROLLSYSTEME

Uwe Helmke

Report Nr. 100

1982
Februar 1983

Forschungsschwerpunkt Dynamische Systeme

Universität Bremen

Bibliothekstraße

Postfach 330 440

2800 Bremen 33

West Germany

Die vorliegende Arbeit wurde im Oktober 1982 eingereicht als
Dissertation zur Erlangung des Grades eines Doktors der Natur -
wissenschaften der Universität Bremen .

An der mündlichen Prüfung nahmen Prof. D. Hinrichsen und Prof. H. F.
Münzner teil, ferner Prof. J. Gamst und Prof. E. Oeljeklaus .

Danksagung

Ich danke Prof. D. Hinrichsen und Prof. H. F. Münzner für die
Anregung und viele hilfreiche Diskussionen und Bemerkungen zu
dieser Arbeit; ferner auch Prof. C. Byrnes für viele lebhaft
Gespräche über die 'Geometrie linearer Systeme' während zweier
Gastaufenthalte beim Forschungsschwerpunkt 'Dynamische Systeme' .

Das Verzeichnis enthält die in der Zeit vom 1. April 1900 bis zum 31. März 1901

in der Provinz Pommern eingetragenen Personen, welche die deutsche Staatsangehörigkeit

erlangt haben, oder welche die deutsche Staatsangehörigkeit verloren haben.

Die in der Provinz Pommern eingetragenen Personen sind nach dem Geburtsort und dem Namen

alphabetisch geordnet. Die in der Provinz Pommern eingetragenen Personen sind nach dem

Verzeichnis

Die in der Provinz Pommern eingetragenen Personen sind nach dem Geburtsort und dem Namen

alphabetisch geordnet. Die in der Provinz Pommern eingetragenen Personen sind nach dem

Geburtsort und dem Namen alphabetisch geordnet. Die in der Provinz Pommern eingetragenen

Personen sind nach dem Geburtsort und dem Namen alphabetisch geordnet. Die in der Provinz

Pommern eingetragenen Personen sind nach dem Geburtsort und dem Namen alphabetisch geordnet.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel 1 Präliminarien	9
1.1 <u>Analytische und algebraische Geometrie</u>	
1.1.1 Varietäten	9
1.1.2 Irreduzibilität und singuläre Punkte	14
1.1.3 Topologischer Abschluß quasi-affiner Varietäten	17
1.2 <u>Zellzerlegung und Homologie</u>	
1.2.1 Borel - Moore Homologie	21
1.2.2 Der Satz von Borel und Haefliger	25
1.3 <u>Ein Lemma aus der Topologie</u>	32
Kapitel 2 Der Raum der linearen Input - Zustand Systeme	35
2.1 <u>Strukturschichten linearer Systeme</u>	36
2.2 <u>Topologie der Strukturschichten</u>	
2.2.1 Stiefel Mannigfaltigkeit und Fahnenbündel	40
2.2.2 Strukturschichten als Faserbündel	44
2.2.3 Trivialität des Bündels	51
2.3 <u>Algebraische Geometrie der Strukturschichten</u>	55
2.4 <u>Hermite Schichten und ihre Kombinatorik</u>	57
2.4.1 Exkurs zur Kombinatorik	63
2.4.2 Dominanz Ordnung der Kombinationen	66
2.4.3 Anordnung der Hermite Schichten	68
2.5 <u>Kronecker Schichten und ihre Kombinatorik</u>	72
2.5.1 Kontrollierbarkeitsindizes und Feedback	74
2.5.2 Kronecker Indizes und Feedback	78
2.5.3 Anordnung der Kronecker Indizes	84

Einleitung

1.1	1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.1.4	1.1.5	1.1.6	1.1.7	1.1.8	1.1.9	1.1.10	1.1.11	1.1.12	1.1.13	1.1.14	1.1.15	1.1.16	1.1.17	1.1.18	1.1.19	1.1.20	1.1.21	1.1.22	1.1.23	1.1.24	1.1.25	1.1.26	1.1.27	1.1.28	1.1.29	1.1.30	1.1.31	1.1.32	1.1.33	1.1.34	1.1.35	1.1.36	1.1.37	1.1.38	1.1.39	1.1.40	1.1.41	1.1.42	1.1.43	1.1.44	1.1.45	1.1.46	1.1.47	1.1.48	1.1.49	1.1.50	1.1.51	1.1.52	1.1.53	1.1.54	1.1.55	1.1.56	1.1.57	1.1.58	1.1.59	1.1.60	1.1.61	1.1.62	1.1.63	1.1.64	1.1.65	1.1.66	1.1.67	1.1.68	1.1.69	1.1.70	1.1.71	1.1.72	1.1.73	1.1.74	1.1.75	1.1.76	1.1.77	1.1.78	1.1.79	1.1.80	1.1.81	1.1.82	1.1.83	1.1.84	1.1.85	1.1.86	1.1.87	1.1.88	1.1.89	1.1.90	1.1.91	1.1.92	1.1.93	1.1.94	1.1.95	1.1.96	1.1.97	1.1.98	1.1.99	1.1.100
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	---------

2.5.4	Anordnung der Kronecker Schichten	95
2.6	<u>Systeme mit r-dimensionalem Erreichbarkeits- raum</u>	99
2.7	<u>Nicht erreichbare Systeme</u>	102
Kapitel 3 Der Orbit Raum linearer erreichbarer Systeme		
3.1	<u>Ähnlichkeitsaktion auf erreichbaren Paaren</u>	107
3.2	<u>Zellzerlegung des Orbit Raumes</u>	119
3.2.1	Kronecker Zellen und Kronecker Varietäten	121
3.2.1	Hermite Zellen und Hermite Varietäten	128
3.3	<u>Die Homologiegruppen</u>	136
3.4	<u>Homotopiegruppen</u>	141
3.5	<u>Topologie des Raumes rationaler Transfer - matrizen</u>	143
<u>Anhang: Nichtexistenz stetiger kanonischer Formen</u>		147
<u>Literatur</u>		149

2.1.1. General description of the system

2.1.2. General description of the system

2.1.3. General description of the system

2.1.4. General description of the system

2.1.5. General description of the system

2.1.6. General description of the system

2.1.7. General description of the system

2.1.8. General description of the system

2.1.9. General description of the system

2.1.10. General description of the system

2.1.11. General description of the system

2.1.12. General description of the system

2.1.13. General description of the system

2.1.14. General description of the system

2.1.15. General description of the system

2.1.16. General description of the system

Einleitung

Eine wichtige Rolle in der Identifikationstheorie endlich dimensionaler zeitinvarianter linearer Kontrollsysteme spielen Räume linearer Systeme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

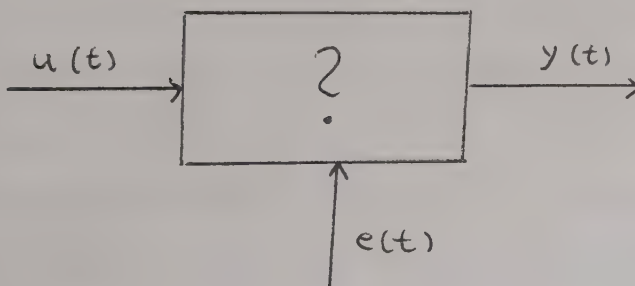
bzw. der entsprechenden Transferfunktionen

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B ,$$

denn sie bilden die Parameterräume für die in der Identifikationstheorie gebräuchlichen Parameter Optimierungsverfahren (Methode der kleinsten Quadrate , Maximum Likelihood , usw.).

Ein typisches Identifikationsproblem wird von Byrnes , Delchamps [13] wie folgt beschrieben:

- "Given: (1) Three vector - valued stochastic processes $y(t), e(t), u(t), t \in \mathbb{Z}$
- (2) A manifold Σ of finite - dimensional, time - invariant linear systems serving as 'candidate models' under the assumption that e, u, y are respectively the disturbance, input, and output of some (unknown) $\hat{\mathcal{S}} \in \Sigma$
- and (3) Observations of y and/or u on some subset of $\mathbb{Z}$.
- Determine: Some estimate of $\hat{\mathcal{S}}$."



Dieses Problem zerfällt dann in der Regel wieder in zwei Teile:

(a): Parametrisierung der zu modellierenden Systemklasse

Durch die der Messung zugänglichen Input - Output Daten $(u(t), y(t))$ sind in der Regel nur die Transferfunktion $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ bzw. die Markov Parameter

$$H_i = CA^i B, \quad i = 0, 1, \dots$$

bestimmbar. Für die numerische Behandlung solcher Objekte sind die Systemmatrizen (A, B, C) sehr geeignet - wie überhaupt jede Parametrisierung des Raumes der proper rationalen Transfermatrizen $G(s)$.

Nun definieren zwei beobachtbare und kontrollierbare Systeme (A, B, C) bzw. $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ genau dann die gleiche Transferfunktion $G(s)$, wenn sie ähnlich sind, d.h. wenn es eine invertierbare Matrix S gibt, mit

$$(*) \quad (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = (SAS^{-1}, SB, CS^{-1}).$$

Nach diesem Hauptsatz der Realisierungstheorie läßt sich also der Raum der proper rationalen Transferfunktionen $G(s)$ (mit festem McMillan Grad $\mathcal{J}(G)$) auch als Orbit Raum $\sum$ kontrollierbarer und beobachtbarer Systeme (A, B, C) modulo der Ähnlichkeitsaktion $(*)$ auffassen. Kanonische Formen für die Ähnlichkeitsaktion $(*)$ kann man dann zur Parametrisierung des Orbit Raumes $\sum$ benutzen; Denham [19], Rissanen [49]. Diese Parametrisierungen sind - bis auf den single input - single output Fall - jedoch alle lokaler Natur und es war lange Zeit in der systemtheoretischen Literatur unklar, ob es auch global definierte Parametrisierungen geben kann. So schreibt z.B. Denham [19]:

" From a more general viewpoint, assume that, for a particular set of input/output measurements, the set of canonical forms for which the parameters are to be estimated has been fixed, If, in the estimation process, it becomes apparent that the wrong structure has been chosen, it would seem to be desirable that an

alternative structure could be chosen in such a way that it would involve a continuous change in the parameters."

Hazewinkel und Kalman [26], [30], haben aber gezeigt, daß eine solche stetige globale kanonische Form für (*) für multivariable Systeme nicht existiert, so daß man also zur Beschreibung der Systemparameter auf die lokalen Parametrisierungen zurückgreifen muß.

Diese lokalen Parametrisierungen von Σ durch Zustandsraum kanonische Formen sind Karten von Σ und Clark hat 1976 in der Tat gezeigt, daß Σ eine analytische Mannigfaltigkeit ist [17].

Ebenfalls 1976 und für skalare Systeme hat Brockett [9] gezeigt, daß der Raum $\text{Rat}(n)$ der proper rationalen Transferfunktionen vom McMillan Grad n genau $n + 1$ Komponenten besitzt und die Topologie einiger dieser Komponenten genauer studiert. Dies ist dann von Segal wesentlich verschärft worden mit dem Ergebnis, daß ein enger Zusammenhang zwischen der Homotopie von $\text{Rat}(n)$ und der Homotopie der Riemann Sphäre S^2 besteht [50]. Diese Arbeiten zeigen insbesondere, daß der Raum $\text{Rat}(n)$ stark nicht-euklidischer Natur ist, was wiederum Einfluß auf die Komplexität möglicher Identifikationsalgorithmen auf $\text{Rat}(n)$ hat (Byrnes, Duncan [14]).

(b): Konvergenz von Identifikationsalgorithmen

Zur Formulierung und Analyse eines Identifikationsalgorithmusses sind (lokale) kanonische Formen keine notwendige Voraussetzung. So kann man mit Hilfe der Morse - Smale Ungleichungen (siehe z.B. Smale [51]) Abschätzungen für die Anzahl der Ruhelagen eines beliebigen Gradientenvektorfeldes auf einer (kompakten) Riemannschen Mannigfaltigkeit M machen, ohne das Vektorfeld dazu konkret kennen zu müssen (vorausgesetzt, das Vektorfeld ist strukturell stabil).

Ein analoger globaler Ansatz zur Analyse von Identifikationsalgorithmen ist kürzlich von Hazewinkel propagiert worden:

"From the identification of systems point of view not only the local structure of $M_{m,n,p}^{co,cr}$ (ist der gleiche Raum wie Σ ; U.H.) is important but also its global structure,... . Thus, for example, if $m=1=p$, $M_{m,n,p}^{co,cr} = \text{Rat}(n)$ decomposes into $(n+1)$ components, and some of these components are of rather complicated topological types ,..., which argues ill for the linearization tricks which are of the back of many identification procedures. One way to view identification is as finding a sequence of points in $M_{m,n,p}^{co,cr}$ as more and more data come in ." (Unterstreichung von mir; U.H.) [27].

Und in [25] wird dieses Programm weiter ausgeführt:

" Viewing identification as 'walking around on M' makes the problem identifiable, i.e. it gets rid of the superfluous parameters. And it does so in a way which is much less ad hoc than the use of one or another canonical forms. Even when global continuous canonical forms do exist ... there are lots of them; and they are not equivalent e.g. in terms of the size of the gradient vectors of error functions and there is no especially favorable one ."

Hazewinkel und Hanzon [25] schlagen daher vor , rekursive Identifikationsalgorithmen als Gradientenvektorfelder auf einer Riemannschen Untermannigfaltigkeit M von $M_{m,n,p}^{co,cr}$ aufzufassen ; dies ist tatsächlich in einzelnen Fällen möglich zu zeigen (Hazewinkel, Helmke, Martin).

Ähnlich argumentieren auch Byrnes, Delchamps [43] und interessieren sich für "asymptotisch deterministische Identifikationsalgorithmen" im Sinne der folgenden Definition:

"A system identification algorithm mit parameter manifold Σ is asymptotically deterministic if and only if the set $\hat{\Sigma} \subset \Sigma$ of possible convergence points consists solely of locally stable equilibrium points for a deterministic vector field on Σ ." [13].

Sie zeigen in dieser Arbeit [13] den Zusammenhang zwischen der Topologie von Σ und der Existenz eines global gegen einen Gleichgewichtspunkt konvergierenden asymptotisch deterministischen Identifikationsalgorithmus auf. So ein Algorithmus existiert nämlich nur dann, wenn Σ homöomorph ist zu einem euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$.

Aus all diesen Arbeiten ist meines Erachtens nach ein sehr enger Zusammenhang zwischen der Topologie bzw. Geometrie von Räumen linearer Systeme und dem Verhalten darauf definierter Identifikationsalgorithmen zu erwarten.

Die hier vorgelegte Dissertation ist z.T. im Zusammenhang mit der oben skizzierten Entwicklung in der linearen Systemtheorie entstanden.

Ausgangspunkt war dabei das Problem, topologische Invarianten des Bahnenraumes $\sum_{n,m}$ erreichbarer Paare (A,B) unter der Ähnlichkeitsaktion $S \cdot (A,B) := (SAS^{-1}, SB)$ - wie z.B. die Betti Zahlen von $\sum_{n,m}$ - zu finden. Dies ist u.a. auch deswegen interessant, weil der Orbit Raum $\sum_{n,m,p}$ aller erreichbaren (beobachtbaren) Systeme (A,B,C) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

(m Inputs, p Outputs, n - dimensionaler Zustandsraum) der Ähnlichkeitsaktion $S \cdot (A,B,C) = (SAS^{-1}, SB, CS^{-1})$ die gleichen Homologiegruppen wie $\sum_{n,m}$ besitzt (vgl. 3.1).

Zu diesem Problem lagen in der Literatur nur sehr wenige Ergebnisse vor. Hazewinkel und Kalman [29], [40], haben den Raum $\sum_{n,m}$ als erste untersucht und gezeigt, daß $\sum_{n,m}$ eine analytische Mannigfaltigkeit ist. Darüber hinaus versuchten sie - um die Quasiprojektivität von $\sum_{n,m}$ zu zeigen - $\sum_{n,m}$ durch explizite algebraische Gleichungen und Ungleichungen in einem projektiven Raum $P_N(k)$ darzustellen. Nach Byrnes und Hurt [15] ist dieses System von Gleichungen und Ungleichungen für $\sum_{n,m}$ aber unvollständig; Byrnes, Hurt geben daher einen unabhängigen Beweis der Quasiprojektivität von $\sum_{n,m}$ mit Hilfe der geometrischen Invariantentheorie Mumfords. Ferner zeigen sie, daß die komplexe Mannigfaltigkeit $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$ für $m > n$ nicht Steinsch ist und mit der gleichen Beweismethodik gibt Byrnes [11] für $m > n$ untere Schranken für viele Betti Zahlen von $\sum_{n,m}$ an. Auch Hazewinkel [2] hatte bemerkt, daß $\sum_{n,m}$ nicht kompakt ist und nicht-triviale Kohomologie besitzt. Schließlich war klar - nach einer Arbeit von Brockett [10] - daß $\sum_{n,m}$ zusammenhängend ist und außerdem die Homöomorphismen

$$\sum_{n,1}(k) \cong k^n, \quad \sum_{1,m}(k) \cong k \times P_{m-1}(k)$$

bestehen. Für $\min(m,n) \geq 2$ war jedoch meines Wissens nach keine einzige Betti Zahl von $\sum_{n,m}(k)$ bekannt.

Ich gebe noch einen Überblick über den Inhalt dieser Arbeit:

In Kapitel 1 stelle ich einige Ergebnisse zur algebraischen und analytischen Geometrie zusammen. Zum größten Teil werden diese Ergebnisse wohl bekannt sein; gelegentlich habe ich aber auch einige eigene kleinere Ergebnisse dort formuliert. Wichtige Hilfsmittel für diese Arbeit sind der dort zitierte Satz von Borel - Haefliger sowie das damit zusammenhängende Konzept einer analytischen zellulären Zerlegung.

In Kapitel 2 untersuche ich die Strukturschichten zu einer Klasse diskreter Ähnlichkeitsinvarianten beliebiger Paare (A, B) . Ich zeige, daß diese Strukturschichten die Struktur eines Fahnenbündels über einer Stiefel Mannigfaltigkeit haben und quasi - affin sind. Der topologische Abschluß einer reellen Strukturschicht ist stets semi - algebraisch, während die abgeschlossene Hülle einer komplexen Strukturschicht eine analytische Varietät ist. Für zwei in der system - theoretischen Literatur häufiger untersuchten Klassen diskreter Ähnlichkeitsinvarianten, die Hermite Indizes bzw. Kronecker Indizes, wird detaillierter die Hüllenordnung untersucht. Dabei zeigt sich, daß die "Hermite Schichten" nur im komplexen Fall eine Stratifikation des Raumes $\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{C})$ erreichbarer Paare (A, B) bilden, während die "Kronecker Schichten" für $k = \mathbb{R}$ und $k = \mathbb{C}$ eine Whitney Stratifikation von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$ bilden. Die abgeschlossene Hülle dieser Kronecker Schichten ist dabei eine analytische Teilvarietät von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$. In beiden Fällen wird noch die Hüllenordnung auf den Kronecker oder Hermite Schichten charakterisiert. Schließlich wird gezeigt, daß die Menge $S_{n,m}^r$ aller Paare (A, B) mit r - dimensionalem Erreichbarkeitsraum eine Mannigfaltigkeit ist, die Dimension berechnet und daraus das Verschwinden einiger Homotopiegruppen von $\tilde{\Sigma}_{n,m}$ gezeigt.

In Kapitel 3 resümiere ich zunächst die bekannten Ergebnisse über den Orbit Raum $\Sigma_{n,m}$ von $\tilde{\Sigma}_{n,m}$ bezüglich der Ähnlichkeitsaktion. Ich habe mich bemüht, die Ergebnisse so elementar wie möglich zu beweisen und auch einige Verallgemeinerungen angegeben.

Ich zeige dann, daß die Kronecker Indizes eine analytische zelluläre Zerlegung von $\Sigma_{n,m}(k)$ in Kronecker Zellen definieren, während die Hermite Indizes nur für $k = \mathbb{C}$ eine analytische zelluläre Zerlegung von $\Sigma_{n,m}(k)$ in Hermite Zellen definieren. Unter Benutzung des Satzes von Borel - Haefliger zeige ich dann für $\Sigma_{n,m}(k)$ ein Analogon zum Basissatz des Schubert Kalküls der Grassmann Mannigfaltigkeit:

Die mod 2 Homologie von $\sum_{n,m}(k)$ wird frei erzeugt von den Poincaré Dualen der Kohomologie Klassen der Kronecker Varietäten . Insbesondere hat $\sum_{n,m}(k)$ die gleichen (mod 2) Homologiegruppen wie die Grassmann Mannigfaltigkeit $G_{n,n+m-1}(k)$. Ferner berechne ich noch einige niedere Homotopiegruppen von $\sum_{n,m}(k)$. Schließlich wende ich diese Ergebnisse auf den Raum $\text{Rat}_{n,m,p}(k)$ aller multivariablen strikt proper rational Transferfunktionen an und bestimme einige niedere Homologiegruppen und Homotopiegruppen dieses Raumes . Diese Ergebnisse hat auch D. Delchamps [48] in seiner Dissertation mit einem anderen Ansatz erzielt.

1.1 Analytische und algebraische Geometrie

1. Varietäten

Dieser Abschnitt besteht aus einer Sammlung von Definitionen, Sätzen und einigen Beispielen über algebraische und analytische Mengen.

Das meiste Material hierzu haben wir den Darstellungen von Milnor [43] und Whitney [57] entnommen.

Sei k der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Unter einer analytischen Untermannigfaltigkeit des k^n verstehen wir entweder eine reell analytische oder eine komplex analytische Untermannigfaltigkeit ; je nachdem ob $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$ ist . Entsprechend heißt eine stetige Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen (reell oder komplex) analytischen Mannigfaltigkeiten analytisch, wenn f um jeden Punkt $a \in M$ - in geeigneten lokalen Koordinaten um a , $f(a)$ - durch eine konvergente Potenzreihe mit Koeffizienten in k dargestellt werden kann. Für analytische Abbildungen $f: M \rightarrow N$ gilt

Identitätssatz ([57])

Ist f auf einer Umgebung eines Punktes $a \in M$ konstant, so ist f auch konstant auf der Zusammenhangskomponente C von a in M .

Eine einfache Beispielsklasse analytischer Funktionen $f: k^n \rightarrow k$ bilden die Polynome $p \in k[X_1, \dots, X_n]$.

Definition

Eine Teilmenge X des k^n heißt eine affin algebraische Varietät , wenn es endlich viele Polynome $p_1, \dots, p_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ gibt mit

$$X = \{x \in k^n \mid p_1(x) = \dots = p_s(x) = 0\} .$$

Die Komplemente $U := k^n - X$ affin algebraischer Varietäten heißen Zariski - offen ; sie sind von der Form

$$U = \{x \in k^n \mid p_1(x) \neq 0 \text{ oder } \dots \text{ oder } p_s(x) \neq 0\} .$$

Spezielle Zariski - offene Teilmengen des k^n sind gegeben durch

$$U = \{ x \in k^n \mid q_1(x) \neq 0, \dots, q_t(x) \neq 0 \} ,$$

$q_1, \dots, q_t$ Polynome.

Definition

$X \subset k^n$ heißt quasi - affin , wenn es eine affin algebraische Varietät $A \subset k^n$ und eine Zariski - offene Teilmenge U des k^n gibt mit $X = A \cap U$.

Es gilt der wichtige Satz (Milnor[43]):

Endlichkeitssatz von Whitney

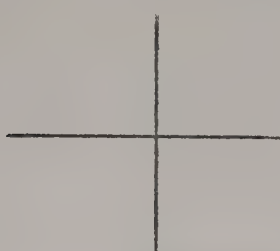
Eine quasi - affine Teilmenge $X \subset k^n$ hat nur endlich viele Zusammenhangskomponenten.

Beispiel 1

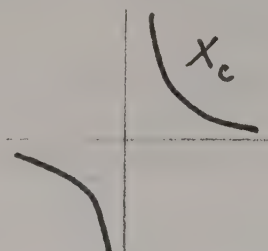
Die allgemeine lineare Gruppe $GL_n(k)$ ist Zariski - offen in $k^{n \times n} = k^{n^2}$, insbesondere auch $k^* := \{ x \in k \mid x \neq 0 \}$.

Beispiel 2

Für $c \in k$ ist $X_c := \{ (x,y) \in k^2 \mid xy = c \}$ affin algebraisch.



$c = 0$



$c \neq 0$

Aber für $c > 0$ ist die Komponente $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = c , x > 0 \}$ nicht affin algebraisch.

Definition

Eine Teilmenge X von k^n heißt algebraisch bzw. analytisch um $a \in X$, falls eine Umgebung U von a in k^n existiert und endlich viele Polynome $p_1, \dots, p_s \in k[X_1, \dots, X_n]$ bzw. analytische Funktionen $p_1, \dots, p_s: U \rightarrow k$ mit

$$X \cap U = \{ x \in U \mid p_1(x) = \dots = p_s(x) = 0 \} .$$

$X \subset k^n$ heißt lokal algebraisch (lokal analytisch), oder eine lokale

Varietät , wenn X um jeden Punkt $a \in X$ algebraisch (analytisch) ist.

Die Standardbeispiele lokal algebraischer Varietäten sind die quasi-affinen Varietäten .

Definition

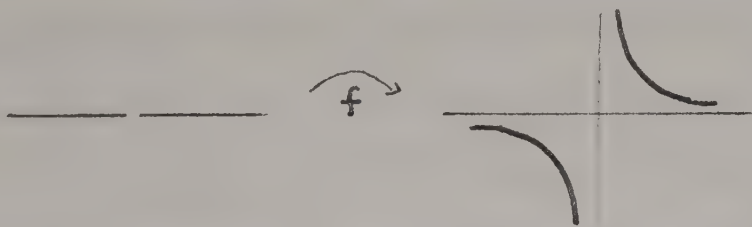
Sei H eine offene Teilmenge des k^n und $X \subset k^n$. X heißt algebraisch (analytisch) in H , oder eine Varietät in H , wenn X um jeden Punkt $a \in H$ algebraisch (analytisch) ist.

Beispiel 3

$X := \{(x,y) \in k^2 \mid |x| < 1, y = 0\}$ ist eine algebraische Varietät in $H := \{(x,y) \in k^2 \mid |x|^2 + |y|^2 < 1\}$, aber nicht quasi-affin.

Beispiel 4

$X := \{x \in k \mid x \neq 0\}$ ist lokal algebraisch, aber nicht analytisch um 0. Durch die Einbettung $f: X \rightarrow k^2$, $f(x) := (x, x^{-1})$,



läßt sich X mit einer affin algebraischen Teilmenge des k^2 identifizieren.

Dieses Prinzip funktioniert allgemeiner:

Sei dazu $p \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein nicht identisch verschwindendes Polynom. Dann ist $X := \{x \in k^n \mid p(x) \neq 0\}$ lokal algebraisch, aber keine Varietät des k^n . Durch die Einbettung

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow k^n \times k \\ x &\mapsto (x, p(x)^{-1}) \end{aligned}$$

kann man X mit der affin algebraischen Varietät $\{(x,y) \in k^n \times k \mid p(x)y = 1\}$

des k^{n+1} identifizieren.

Wir notieren einige grundlegende Eigenschaften von Varietäten, vgl. Whitney [57].

(a) Lokale Varietäten des k^n sind lokal abgeschlossen.

(b) Sei $X \subset H$, H offen in k^n . X ist eine Varietät in H dann und nur dann, wenn X eine lokale Varietät ist und abgeschlossen in H ist.

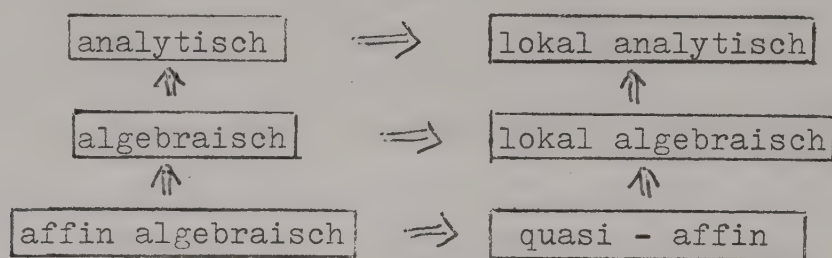
(c) Ist X eine Varietät in H und $H' \subset H$ offen, dann ist $X \cap H'$ eine Varietät in H' .

(d) Endliche Durchschnitte lokaler Varietäten sind wieder lokale Varietäten.

(e) Endliche Vereinigungen lokaler Varietäten ("konstruierbare Mengen" sind in der Regel nicht selber lokale Varietäten; es gilt aber: Endliche Vereinigungen von Varietäten in $H \subset k^n$ sind wieder Varietäten in H .

(f) Eine analytische Untermannigfaltigkeit des k^n ist eine lokal analytische Varietät.

Die Beziehungen zwischen den diversen Varietätsbegriffen halten wir im Diagramm fest:



Definition

Eine Teilmenge A der lokalen Varietät X heißt algebraisch (analytisch) in X , oder eine Teilvarietät von X , wenn A um jeden Punkt von X algebraisch (analytisch) ist.

Offenbar gilt:

(g) $A \subset X$ ist Teilvarietät $\Leftrightarrow A$ ist lokale Varietät und abgeschlossen in X .

Satz 1

Sei C eine Zusammenhangskomponente der quasi - affinen Varietät $X \subset k^n$.
Dann ist C eine algebraische Teilvarietät von X .

Beweis

X ist Durchschnitt der affin algebraischen Varietät

$$A := \{x \in k^n \mid p_1(x) = \dots = p_s(x) = 0\}$$

mit der Zariski - offenen Menge

$$U := \{x \in k^n \mid q_1(x) \neq 0 \text{ oder } \dots \text{ oder } q_t(x) \neq 0\}.$$

Sei $a \in X$ fest.

1. Fall: $a \notin C$

Da C abgeschlossen in X ist und k^n Hausdorffsch, existiert eine nicht-leere Umgebung $V \subset U$ von a mit $C \cap V = \emptyset$. Sei $p \in k[X_1, \dots, X_n]$ das konstante Polynom $p \equiv 1$. Dann gilt

$$C \cap V = \{x \in V \mid p(x) = 0\}.$$

2. Fall: $a \in C$

Behauptung: $\left[\begin{array}{l} \text{Es gibt nichtleere Umgebung } V \subset U \text{ von } a \text{ in } k^n \text{ mit} \\ X \cap V = C \cap V. \end{array} \right.$

Andernfalls existiert ja eine Folge (x_l) mit $x_l \in X - C$ und $\lim_{l \rightarrow \infty} x_l = a$.

Nach dem Endlichkeitssatz von Whitney können wir o.B.d.A. annehmen, daß - für hinreichend großes l - x_l in einer festen Komponente $D \subset X - C$ von X liegt. Also gilt $\overline{D} \cap C \neq \emptyset$ und $D \cap C = \emptyset$. Da D abgeschlossen in X ist, ist $\overline{D} = D$. Widerspruch.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} C \cap V &= X \cap V = A \cap V = \\ &= \{x \in V \mid p_1(x) = \dots = p_s(x) = 0\}, \end{aligned}$$

d.h. C ist algebraisch um a .



2. Irreduzibilität und singuläre Punkte

Definition

Eine lokale Varietät $X \subset k^n$ heißt reduzibel, falls es Teilvarietäten X_1, X_2 von X gibt mit $X = X_1 \cup X_2$ und $X \neq X_1, X \neq X_2$. Andernfalls heißt X irreduzibel.

Satz 2

Sei X eine quasi - affine Untermannigfaltigkeit des k^n . Dann ist X irreduzibel dann und nur dann, wenn X zusammenhängend ist.

Beweis

" $\Rightarrow$ " : Klar nach Satz 1.

" $\Leftarrow$ " : Sei X zusammenhängend mit $X = X_1 \cup X_2, X \neq X_1, X \neq X_2, X_1, X_2$

Teilvarietäten von X . Dann enthält eine der beiden Mengen X_i , z.B. X_1 eine nichtleere offene Teilmenge U von X . Sei $a \in X$ ein Randpunkt von U . Da X_1 eine Teilvarietät von X ist, existiert eine nichtleere zusammenhängende Umgebung V von a in X und analytische Funktionen $f_1, \dots, f_s: V \rightarrow k$ mit

$$X_1 \cap V = \{x \in V \mid f_1(x) = \dots = f_s(x) = 0\}.$$

Wegen $U \cap V \neq \emptyset$, ist

$$X_1 \cap V \cap U = X_1 \cap U \cap V = U \cap V$$

eine nichtleere offene Teilmenge von V . Also verschwinden die analytischen Funktionen f_i auf der offenen Teilmenge $U \cap V$ von V . Aus dem Identitätssatz folgt daher $V \subset X_1$. Sei nun W die Vereinigung aller offenen Teilmengen U von X mit $U \subset X_1$. Dann ist W nichtleer und nach dem obigen Argument sowohl offen als auch abgeschlossen in X . Da X zusammenhängend ist folgt $W = X$, also $X = X_1$. Widerspruch.

Beispiel 5

$X = \{(x,y) \in k^2 \mid xy = 0, (x,y) \neq (0,0)\}$ ist reduzibel mit
 $X = \{(x,0) \in k^2 \mid x \neq 0\} \cup \{(0,y) \in k^2 \mid y \neq 0\}$ Zerlegung in Teilvarietäten.



Beispiel 6

$X(k) := \{(x,y) \in k^2 \mid xy = 1\}$ ist eine affin algebraische Untermannigfaltigkeit von k^2 . Nach Satz 2 ist $X(\mathbb{R})$ reduzibel, während $X(\mathbb{C})$ zusammenhängend also irreduzibel ist.

Das Polynom $p(x,y) := xy - 1$ ist irreduzibel: Seien $f, g \in k[X,Y]$ Polynome mit $p(x,y) = f(x,y)g(x,y)$ für alle $(x,y) \in k^2$. Dann haben f, g Grad ≤ 2 und für alle $x \neq 0$ gilt $f(x, x^{-1})g(x, x^{-1}) = 0$. Sei o.B.d.A. $f(x, x^{-1}) = 0$ für alle $x \neq 0$. Mit

$$f(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

folgt:

$$0 = a + bx + cx^{-1} + dx^2 + e + fx^{-2}$$

oder

$$0 = f + cx + (a + e)x^2 + bx^3 + dx^4 \quad \text{für alle } x \in k.$$

Also gilt $f = c = b = d = 0$ und $a = -e$, d.h.:

$$f(x,y) = e(xy - 1) \quad \text{für alle } (x,y) \in k^2.$$

Also ist $e \neq 0$ und $g(x,y) = e^{-1}$.

Mit anderen Worten: Die affine Varietät $X(k)$ ist stets irreduzibel im Sinne der algebraischen Geometrie, d.h. das zugehörige Verschwindungsideal $I(X(k))$ ist ein Primideal in $k[X,Y]$, während im Sinne der hier verwendeten Terminologie $X(\mathbb{R})$ reduzibel ist!

Zur Unterscheidung dieser beiden Begriffe spricht man auch von global irreduzibel, falls die algebraische Definition gemeint ist und nennt irreduzible Varietäten im Sinne der oben gegebenen Definition lokal irreduzibel; vgl. Griffiths, Adams [1].

Sei $X \subset k^n$ eine affine algebraische Varietät und $f_1, \dots, f_s$ ein Erzeugendensystem des Ideals $I(X) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] \mid f = 0 \text{ auf } X\}$. Sei r der größte Rang, den die Jakobi Matrix $(\partial f_i / \partial x_j)$ auf X annimmt.

Definition

$a \in X$ heißt ein nicht - singulärer oder einfacher Punkt von X , falls

die Jakobi Matrix $J = (\partial f_i / \partial x_j)_{\substack{i=1,\dots,s \\ j=1,\dots,n}}$ maximalen Rang r in a hat;

andernfalls heißt a ein singulärer Punkt von X . Die Menge $\Sigma(X)$ aller singulären Punkte von X heißt der singuläre Ort von X .

Offenbar gilt:

Lemma 1

Die Menge $\Sigma(X)$ aller singulären Punkte von X ist eine propere Teilvarietät von X .

Für komplexe affin algebraische Varietäten des $\mathbb{C}^n$ gilt die äquivalente Charakterisierung der singulären Punkte:

Lemma 2

Eine komplexe affin algebraische Varietät ist keine differenzierbare Mannigfaltigkeit in der Umgebung eines singulären Punktes.

Beweis: Siehe Milnor [43], p. 13.

Irreduzibilitätstest

Seien A, X affin algebraische Varietäten in k^n mit $\Sigma(X) \subset A \subset X$.

Ist $U := X - A$ dicht in X und zusammenhängend, dann ist X irreduzibel.

Beweis

Seien $X_1 \neq X, X_2 \neq X$ Teilvarietäten von X mit $X = X_1 \cup X_2$. Dann sind $U_i := U \cap X_i$, $i = 1, 2$, Teilvarietäten der quasi-affinen Varietät U . U_i ist nicht leer: Ist nämlich z.B. $U_1 = \emptyset$, so folgt $X_1 \subset A$. Also $X_2 \supset U$ und da U dicht in X liegt, folgt $X_2 = X$. Widerspruch.

Daher ist U reduzibel. Wegen $U \subset X - \Sigma(X)$ offen, ist U eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von k^n und nach Satz 2 ist daher U irreduzibel. Widerspruch.

Für $k = \mathbb{C}$ gilt sogar das schärfere

Irreduzibilitätskriterium

Sei X eine komplexe affin algebraische Varietät in $\mathbb{C}^n$. X ist irreduzibel genau dann, wenn $X - \Sigma(X)$ zusammenhängend ist.

Einen Beweis findet man in Whitney [57], Theorem 1H, p. 76. Der Beweis beruht wesentlich auf der Tatsache, daß der singuläre Ort einer komplexen algebraischen Varietät stets reelle Kodimension ≥ 2 hat.

3. Topologischer Abschluß quasi - affiner Varietäten

Im allgemeinen ist der topologische Abschluß einer lokalen algebraischen Varietät in k^n nicht wieder eine lokale Varietät; siehe Beispiel 3. Selbst für lokale analytische Varietäten muß dies nicht stimmen, wie ein Gegenbeispiel von Whitney zeigt:

$X := \{ (z, e^{-1/z}) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in \mathbb{C} - \{0\} \}$ ist eine lokale analytische Varietät, aber der topologische Abschluß $\bar{X}$ von X in $\mathbb{C}^2$ ist nicht analytisch!

Satz 3

Sei $X \subset \mathbb{C}^n$ eine komplexe quasi - affine Varietät. Dann ist der topologische Abschluß $\bar{X}$ von X in $\mathbb{C}^n$ eine analytische Teilvarietät von $\mathbb{C}^n$.

Beweis

$X = A \cap U$ mit $A \subset \mathbb{C}^n$ affin algebraisch und $U \subset \mathbb{C}^n$ Zariski - offen. Dann gibt es eine affin algebraische Varietät $B \subset \mathbb{C}^n$ mit $U = \mathbb{C}^n - B$. Also ist $X = A - A \cap B$ die Differenzmenge affin algebraischer Varietäten. Nach Whitney [57], Theorem 2I, p. 78, ist daher $\bar{X}$ eine analytische Teilvarietät des $\mathbb{C}^n$.



Für reelle quasi - affine Varietäten im $\mathbb{R}^n$ gilt dieser Satz im allgemeinen nicht; siehe nachstehendes Gegenbeispiel. Unter zusätzlichen Bedingungen an den singulären Ort läßt sich jedoch ein entsprechender Satz beweisen. Dazu führe ich den folgenden Begriff ein:

Definition

Eine lokale Varietät $X \subset k^n$ heißt lokal glatt zerfallend, wenn es um jeden Punkt $a \in X$ eine Umgebung $U \subset k^n$ und endlich viele analytische zusammenhängende Untermannigfaltigkeiten $M_1, \dots, M_s$ von U gibt mit

(a) $M_1, \dots, M_s$ sind abgeschlossen in U

(b) $X \cap U = M_1 \cup \dots \cup M_s$.

Jede quasi - affine Teilmenge X des $\mathbb{R}^n$ läßt sich darstellen durch $X = A - A \cap B$, mit A, B affine algebraische Teilvarietäten des $\mathbb{R}^n$.

Satz 4

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ quasi - affin und A lokal glatt zerfallend. Dann ist der topologische Abschluß $\overline{X}$ von X in $\mathbb{R}^n$ eine analytische Teilvarietät von $\mathbb{R}^n$.

Beweis

Für $a \in \mathbb{R}^n - \overline{X}$ existiert eine Umgebung $U \neq \emptyset$ von a im $\mathbb{R}^n$ mit $U \cap \overline{X} = \emptyset$

Also ist $\overline{X}$ analytisch um a .

Sei $a \in \overline{X}$ und $X = A - A \cap B$. Nach dem Endlichkeitssatz von Whitney hat A endlich viele Zusammenhangskomponenten A_i :

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Nach Satz 1 sind die Mengen A_i algebraische Teilvarietäten von $\mathbb{R}^n$ und wie A ebenfalls lokal glatt zerfallend. Wegen

$$\overline{X} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i - A_i \cap B}$$

reicht es zu zeigen, daß für alle $i \in I$ die Mengen $\overline{A_i - A_i \cap B}$ analytische Teilvarietäten des $\mathbb{R}^n$ sind. Setze $X_i := A_i \cap B$.

Sei $a \in \overline{A_i - X_i} \subset A_i$. Da A_i lokal glatt zerfällt, existiert eine Umgebung V von a in $\mathbb{R}^n$ und endlich viele abgeschlossene und zusammenhängende analytische Untermannigfaltigkeiten $M_1, \dots, M_s$ von V mit $A_i \cap V = M_1 \cup \dots \cup M_s$. Aus dem Identitätssatz folgt damit für $j = 1, \dots, s$

Entweder gilt $M_j \cap B = M_j$ oder $M_j \cap B$ hat keinen inneren Punkt in M_j .

D.h.:

Entweder gilt $\overline{M_j - M_j \cap B} = \emptyset$ oder $\overline{M_j - M_j \cap B} = M_j$ für die relativen Abschlüsse in V .

Also ist

$$\overline{A_i - X_i} \cap V = \bigcup_{j=1}^s \overline{M_j - M_j} \cap B$$

eine endliche Vereinigung von analytischen Varietäten in V und daher selber analytisch in V .



Beispiel 7

Schon eindimensionale quasi - affine Varietäten erfüllen im allgemeinen nicht die Voraussetzung von Satz 4. So ist $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \mid x^2 = y^3\}$ quasi - affin, die Neilsche Parabel $A = \overline{X}$ aber nicht lokal glatt zerfallend um $(x,y) = (0,0)$. Vgl. aber auch Lemma 3.3 in Milnor [43].

Beispiel 8

Wir betrachten die "Hermite Schicht" (siehe 2.4)

$$X := \{(A,v) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^2 \mid v \neq 0, \det(v, Av) = 0\}.$$

Es ist $U := \{(A,v) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^2 \mid v \neq 0\}$ Zariski - offen und $X = X_0 \cap U$ mit

$$X_0 := \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^2 \mid \begin{vmatrix} x & ax+by \\ y & cx+dy \end{vmatrix} = cx^2 + (d-a)xy - by^2 = 0 \right\}.$$

Dann gilt :

$$\overline{X} = \{(A,v) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^2 \mid \det(v, Av) = 0, \text{ Spektrum von } A \text{ ist reell} \}.$$

Die Inklusionsrichtung " $\subset$ " ist klar. Sei andererseits (A,v) gegeben mit $\det(v, Av) = 0$ und A habe reelles Spektrum. Ist $v \neq 0$, so ist $(A,v) \in X \subset \overline{X}$. Angenommen, $v = 0$. Sei $w \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ein (reeller) Eigenvektor von A . Für $|\varepsilon| \neq 0$ genügend klein ist dann $v_\varepsilon := \varepsilon \cdot w$ eine Approximation von $v = 0$ mit $(A, v_\varepsilon) \in X$. Also $(A,v) \in \overline{X}$. Dies zeigt " $\supset$ ".

Wegen $\text{Spec}(A)$ reell genau dann, wenn $(\text{Tr} A)^2 - 4\det A \geq 0$, ist der topologische Abschluß $\overline{X}$ von X zwar eine semialgebraische Menge aber

keine lokale analytische Varietät ! Dies zeigt, daß ein Analogon zu Satz 3 für reelle quasi - affine Varietäten nicht gilt.

Eine Verallgemeinerung von Satz 3 für analytische Varietäten stammt von Remmert und Stein [48]. Sie haben den folgenden Satz gezeigt [48]:

Satz 5

Sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und A eine 1 - dimensionale analytische Varietät in G ($0 \leq l < n - 1$); sei ferner X eine rein k - dimensionale analytische Varietät in $G - A$ und $1 < k < n$. Dann ist die abgeschlossene Hülle $\bar{X}$ von X in G eine rein k - dimensionale analytische Varietät in G .

Bemerkung

Da jede reelle quasi - affine Varietät $X \subset \mathbb{R}^n$ semialgebraisch ist, ist auch der topologische Abschluß $\bar{X}$ von X in $\mathbb{R}^n$ semialgebraisch; siehe Gibson, Wirthmüller, du Plessis, Looijenga [22].

Abschließend definieren wir noch:

Sei X eine analytische Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge A von X heißt eine analytische Teilvarietät von X , wenn A abgeschlossen in X ist und es um jeden Punkt $a \in A$ eine Umgebung U von a in X gibt sowie analytische Funktionen $f_1, \dots, f_s: U \rightarrow k$ mit

$$A \cap U = \bigcap_{j=1}^s f_j^{-1}(0) .$$

1.2 Zellzerlegung und Homologie

1. Borel - Moore Homologie

Ich gebe hier einen kurzen Abriß der Borel - Moore Homologie , die eine natürliche Art der Garbenhomologie darstellt. Allgemeine Informationen zur Garbentheorie kann man in Wells [56] oder Bredon [8] finden; zur Borel - Moore Homologietheorie habe ich die Quellen Borel-Moore [6], Borel - Haefliger [5] und Zisman [59] verwendet .

Sei X ein lokal kompakter Hausdorff Raum und K ein beliebiger Körper. Alle Garben sind im folgenden Garben von K - Vektorräumen auf X . Der Buchstabe $\mathcal{F}$ wird verwendet , um eine gegebene Familie von Trägern auf X zu bezeichnen , c steht für die Klasse aller kompakten Teilmengen von X . Für eine Garbe S auf X bezeichnen wir mit $\Gamma(X,S)$, $\Gamma_{\mathcal{F}}(X,S)$, $S(A)$ jeweils die Menge der stetigen Schnitte von S , der Schnitte von S mit Träger in $\mathcal{F}$, und der Schnitte von S über der Teilmenge A von X . Wir verwenden auch den Buchstaben K , um die konstante Garbe $X \times K$ auf X zu bezeichnen.

Eine Garbe S auf X heißt flabby (soft), wenn die Einschränkung - Abbildung $\Gamma(K,S) \rightarrow S(A)$ surjektiv ist für jede offene (abgeschlossene) Teilmenge A von X . S heißt c - soft , wenn $S|_A$ soft ist für alle kompakten Teilmengen A von X . Eine Differentialgarbe ist eine Folge von Garben

$$\dots \xrightarrow{d_{-1}} S^0 \xrightarrow{d_0} S^1 \xrightarrow{d_1} S^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

mit $d_j \circ d_{j-1} = 0$.

Eine Garbenauflösung von S , S Garbe , ist eine exakte Folge von Garben

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow S^0 \xrightarrow{d_0} S^1 \xrightarrow{d_1} S^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

Zu jeder Garbe S auf X gibt es eine kanonische Garbenauflösung:

Sei $I(S)$ die Garbe der (nicht notwendig stetigen) Schnitte ; in Prägarben Daten:

$$I(S)(U) := \prod_{x \in U} S_x \quad , \quad S_x = \text{Halm von } S \text{ über } x .$$

Definiere: $(C^0(X, S) := I(S))$

$$F^1(S) := I(S)/S \quad , \quad C^1(X, S) := I(F^1(S)) .$$

$$F^i(S) := C^{i-1}(X, S)/F^{i-1}(S) \quad , \quad C^i(X, S) := I(F^i(S)) \text{ für } i \geq 2 .$$

Dadurch erhalten wir eine softe Garbenauflösung von S :

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow C^0(X, S) \longrightarrow C^1(X, S) \longrightarrow \dots$$

die wir abgekürzt schreiben:

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow C^*(X, S) .$$

Durch Bildung von $\underline{\mathcal{F}}$ - Schnitten erhalten wir einen Komplex von K - Vektorräumen

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\underline{\mathcal{F}}}(X, S) \longrightarrow \Gamma_{\underline{\mathcal{F}}}(X, C^0(X, S)) \longrightarrow \Gamma_{\underline{\mathcal{F}}}(X, C^1(X, S)) \longrightarrow \dots .$$

Wir setzen

$$\underline{C}_{\underline{\mathcal{F}}}^*(X, S) := \Gamma_{\underline{\mathcal{F}}}(X, C^*(X, S)) .$$

Definition

Die n - te Garben Kohomologiegruppe von X mit Träger $\underline{\mathcal{F}}$ und Koeffizienten in K ist die n - te Kohomologiegruppe des Komplexes $\underline{C}_{\underline{\mathcal{F}}}^*(X, K)$, d.h.

$$H_{\underline{\mathcal{F}}}^n(X, K) := \frac{\text{Ker}(\underline{C}_{\underline{\mathcal{F}}}^n(X, K) \longrightarrow \underline{C}_{\underline{\mathcal{F}}}^{n+1}(X, K))}{\text{Im}(\underline{C}_{\underline{\mathcal{F}}}^{n-1}(X, K) \longrightarrow \underline{C}_{\underline{\mathcal{F}}}^n(X, K))} .$$

Ein wichtiges Resultat in diesem Kontext ist der abstrakte de Rham Satz . Er besagt , daß für jede feine (oder allgemeiner azyklische) Auflösung von K , die zu dieser Auflösung gehörenden Kohomologie - gruppen isomorph sind zu den oben erklärten Kohomologiegruppen (bei Verwendung der kanonischen Auflösung).

Um in ähnlicher Weise die Garben Homologiegruppen definieren zu können , benötigen wir den Begriff der dualen Garbe .

Zu jeder c - feinen Garbe S von K - Vektorräumen sei $D(S)$ die Garbe definiert durch

$$D(S)(U) := \text{Hom}(\Gamma_c(S|_U), K) .$$

$D(S)$ heißt die duale Garbe von S .

Sei $S := (S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine c - feine Differentialgarbe vom Grad $+1$.

Dann ist $D(S) := (D(S_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ eine c - feine Differentialgarbe vom Grad -1 . Wir setzen:

$$C_H(X, K) := D(C^*(X, K)) .$$

$C_H(X, K)$ ist flabby und c - fein . Durch

$$C_{\star}(X, K) := \Gamma(X, C_H(X, K))$$

bekommen wir einen Komplex $(C_n(X, K))_{n \in \mathbb{Z}}$ von K - Vektorräumen mit verbindenden Abbildungen $d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ vom Grad -1 .

Definition

Die Borel - Moore Homologie von X ist die Homologie dieses Komplexes, d.h.:

$$H_n^{BM}(X, K) := \frac{\text{Ker}(C_n(X, K) \rightarrow C_{n-1}(X, K))}{\text{Im}(C_{n+1}(X, K) \rightarrow C_n(X, K))} , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

$H_{\star}^{BM}(X, K)$ heißt vom endlichen Typ , wenn $H_n^{BM}(X, K)$ ein endlich dimensionaler K - Vektorraum ist für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Theorem 1

Ist $H_{\star}^{\text{BM}}(X, K)$ vom endlichen Typ, dann ist für alle $n \in \mathbb{Z}$ $H_n^{\text{BM}}(X, K)$ isomorph zu $H_c^n(X, K)$.

Beweis

Nach Borel - Moore [6], p. 144, gilt

$$D(C_{\mathbb{C}}^{\star}(X, K)) = C_{\star}(X, K).$$

Da K ein Körper ist, ist daher $C_{\star}(X, K)$ der duale Vektorraum von $C_{\mathbb{C}}^{\star}(X, K)$ mit verbindenden linearen Abbildungen $d_n: C_n(X, K) \rightarrow C_{n-1}(X, K)$ gegeben durch

$$d_n = (-1)^n \cdot (\text{duale Abbildung von } d^{n-1}: C_c^{n-1}(X, K) \rightarrow C_c^n(X, K)).$$

Also

$$\begin{aligned} H_n^{\text{BM}}(X, K) &= \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1} \\ &= \text{Ker}(d^{n-1})^{\star} / \text{Im}(d^n)^{\star} \quad (f^{\star} := \text{duale Abbildung von } f) \\ &\cong (\text{Ker}(d^{n-1})^{\star} / \text{Im}(d^n)^{\star})^{\star} \\ &\cong \text{Ker } d^n / \text{Im } d^{n-1} = H_c^n(X, K). \end{aligned}$$



Ein wichtiges Ergebnis zur Interpretation der Borel - Moore Homologie ist der folgende Satz:

Theorem 2

Sei X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $H_{\star}^{\text{BM}}(X, \mathbb{Z}_2)$ vom endlichen Typ. Dann ist für jedes $q \in \mathbb{Z}$ $H_q^{\text{BM}}(X, \mathbb{Z}_2)$ isomorph zu $H_{n-q}(X, \mathbb{Z}_2)$, der $(n-q)$ -ten mod 2 singulären Homologiegruppe von X .

Beweis

Nach Theorem 1 gilt $H_q^{\text{BM}}(X, \mathbb{Z}_2) \cong H_c^q(X, \mathbb{Z}_2)$. Die singuläre Kohomologie mit kompaktem Träger ist eine azyklische Auflösung der konstanten

Garbe $\mathbb{Z}_2$. Also folgt aus dem abstrakten de Rham Satz:

$H_c^q(X, \mathbb{Z}_2) \cong$ q - ten singulären Kohomologiegruppe mit kompaktem Träger.

Mit Poincaré - Dualität , Greenberg[24], folgt damit:

mod 2 q - te singuläre Kohomologiegruppe mit kompaktem Träger

$\cong$ mod 2 (n-q) - ten singulären Homologiegruppe

$= H_{n-q}(X, \mathbb{Z}_2)$.



2. Der Satz von Borel und Haefliger

Definition

Eine Zerlegung $(X_i)_{i \in I}$ einer analytischen Mannigfaltigkeit X in disjunkte Teilmengen heißt eine analytische zelluläre Zerlegung , wenn

(1) $(X_i)_{i \in I}$ ist lokal endlich und X_i ist eine analytische Untermannigfaltigkeit von X analytisch isomorph zu einem $\mathbb{R}^{n_i}$,

(2) Der Rand von X_i in X ist die Vereinigung ^{von} Zellen X_j von niedrigerer Dimension ,

(3) Die topologische Hülle $\overline{X_i}$ von X_i in X ist eine analytische Teilvarietät von X .

Beispiele solcher Räume mit einer analytischen Zellzerlegung sind z.B. die projektiven Räume $P_n(k)$ und allgemeiner die Grassmann Mannigfaltigkeiten $G_{r,n}(k)$.

Die grundlegende Bedeutung analytischer zellulärer Zerlegungen liegt darin , daß man an ihnen unmittelbar die mod 2 Homologie - gruppen ablesen kann .

Sei X eine n - dimensionale reell analytische Mannigfaltigkeit mit einer endlichen analytischen zellulären Zerlegung $(X_i)_{i \in I}$.
Für jede natürliche Zahl $q \geq 0$ sei

$$\beta_q := \text{card} \{ i \in I \mid \dim X_i = q \}$$

und

$$b_q := \text{card} \{ i \in I \mid \text{codim } X_i = q \}$$

mit $\text{codim } X_i := \dim X - \dim X_i = n - \dim X_i$.

Theorem 3 (Borel - Haefliger)

a) Jede analytische Teilvarietät $\overline{X_i}$ bestimmt eine mod 2 Homologie - klasse $[\overline{X_i}] \in H_{\star}^{\text{BM}}(X; \mathbb{Z}_2)$.

b) Die Menge $\{ [\overline{X_i}] \mid \dim X_i = q \}$ ist eine Basis von $H_q^{\text{BM}}(X; \mathbb{Z}_2)$ und es folgt :

$$H_q^{\text{BM}}(X; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{\beta_q} := \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_2}_{\beta_q}.$$

Bemerkung zum Beweis

Der Beweis von a) ist schwer und soll daher hier nicht erbracht werden; siehe Borel - Haefliger [5].

Wir skizzieren die Beweisidee für b):

Sei $J \subset I$ die Teilmenge aller Indizes j mit $\dim X_j = \dim X = n$ und $Y := \bigcup_{j \in J} X_j$; dies ist eine disjunkte Vereinigung von Teilmengen, die homöomorph sind zu $\mathbb{R}^n$. Daher

$$H_n^{\text{BM}}(Y; \mathbb{Z}_2) \cong \prod_{j \in J} H_n^{\text{BM}}(X_j; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{\beta_n}$$

und $H_q(Y; \mathbb{Z}_2) = \{0\}$ für $q \neq n$.

Da $\dim (X - Y) \leq n - 1$, erhalten wir aus der exakten Homologiesequenz

$$\dots \rightarrow H_i^{BM}(Y; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_i^{BM}(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_i^{BM}(X-Y; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{i-1}^{BM}(Y; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \dots$$

die Beziehungen

$$H_n^{BM}(X; \mathbb{Z}_2) \cong H_n^{BM}(Y; \mathbb{Z}_2), \quad H_q^{BM}(X; \mathbb{Z}_2) \cong H_q^{BM}(X-Y; \mathbb{Z}_2) \quad \text{für } q < n.$$

Aber $X - Y$ ist wieder eine reell analytische Varietät mit analytischer zellulärer Zerlegung X_i ($i \in I$, $i \notin J$) und es ist möglich, rekursiv fortzufahren.



Für $[X_i] \in H_q^{BM}(X; \mathbb{Z}_2) \cong H_q^C(X; \mathbb{Z}_2)$ sei $PD(X_i)$ die entsprechende Poincaré - duale Homologiekategorie in $H_{n-q}(X; \mathbb{Z}_2)$. Mit Theorem 2 können wir den Satz von Borel - Haefliger auch so formulieren:

Theorem 3' (Borel - Haefliger)

Sei X eine reell analytische Mannigfaltigkeit und $(X_i)_{i \in I}$ eine endliche analytische zelluläre Zerlegung von X . Dann gilt:

a) Jede analytische Teilvarietät $\overline{X_i}$ bestimmt eine mod 2 Homologie - klasse $PD(X_i) \in H_{\star}(X; \mathbb{Z}_2)$.

b) Die Menge $\{PD(X_i) \mid \text{codim } X_i = q\}$ ist eine Basis von $H_q(X; \mathbb{Z}_2)$ und daher ist

$$H_q(X; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{b_q} \quad \text{für alle } q \geq 0.$$



Aus Theorem 3' folgt sofort

Bemerkung

Seien $(X_i)_{i \in I}$ und $(Y_j)_{j \in J}$ endliche analytische zelluläre Zerlegungen der reell analytischen Mannigfaltigkeit X und b_q bzw. b'_q die Anzahl der Zellen X_i bzw. Y_j mit $\text{codim } X_i = \text{codim } Y_j = q$. Dann gilt:

(1) Die Mengen I, J haben die gleiche Anzahl von Elementen.

(2) Für alle $q \geq 0$ ist $b_q = b'_q$, d.h. diese Zahlen sind topologische

Invarianten von X !

Beispiel: Homologiegruppen der Grassmann Mannigfaltigkeit

Sei $G_{r,n}$ die Grassmann Mannigfaltigkeit aller r - dimensionalen linearen Unterräume des $\mathbb{R}^n$; $1 \leq r \leq n$.

$G_{r,n}$ ist eine reell analytische Mannigfaltigkeit und die Schubert Zellen $S_0(a)$, $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ mit

$$(i) \quad 0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \leq n - r ,$$

bilden eine endliche analytische zelluläre Zerlegung von $G_{r,n}$; siehe Milnor - Stasheff [44] und Stoll [53] für Details . Die q - dimensionalen Schubert Zellen $S_0(a)$ sind charakterisiert durch

$$(ii) \quad a_1 + \dots + a_r = q .$$

Sei $l_q(r,n)$ die Anzahl solcher Folgen $(a_1, \dots, a_r)$ mit (i), (ii) .

Aus dem Satz von Borel - Haefliger folgt daher sofort das klassische Resultat:

$$\left[H_q(G_{r,n}; \mathbb{Z}_2) \right] \cong \mathbb{Z}_2^{l_q(r,n)} \quad \text{für alle } q \geq 0 .$$

Aus dem Satz von Borel - Haefliger folgt - in Hinblick auf die Poincaré - Vermutung - ein bemerkenswertes Resultat:

Theorem 4 Sei X eine n - dimensionale reell analytische kompakte Mannigfaltigkeit mit einer endlichen analytischen zellulären Zerlegung $(X_i)_{i \in I}$. Sei S^n die n - Sphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$. Ist für alle $q \geq 0$

$$H_q(X; \mathbb{Z}_2) \cong H_q(S^n; \mathbb{Z}_2) ,$$

so ist X homöomorph zu S^n .

Beweis

$$H_q(S^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{\beta_q} , \text{ mit}$$

$$\beta_q = \begin{cases} 1 & \text{für } q = 0, n \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Sei b_q die Anzahl der Zellen X_i mit $\text{codim } X_i = q$. Nach Theorem 3' ist $b_q = \beta_q$, d.h. die Zerlegung $(X_i)_{i \in I}$ besteht nur aus einer einpunktigen Menge $X_0 = \{a\}$ (0 - Zelle) und einer n - Zelle X_n . X ist also die Alexandroff - Kompaktifizierung von $X_n \cong \mathbb{R}^n$ und daher homöomorph zu S^n .



Unglücklicherweise ist dies wohl kein Weg, um die Poincaré - Vermutung zu beweisen. Wir zeigen nämlich jetzt, daß nicht jede dreidimensionale kompakte Mannigfaltigkeit eine analytische zelluläre Zerlegung besitzt. Das folgende Gegenbeispiel ist mir von F. Takens und D. Fried auf einer Tagung in Oberwolfach 1981 vorgeschlagen worden.

Für natürliche Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$, p, q coprime, sei $L(p, q)$ der dreidimensionale Linsenraum; vgl. Hu [37]. $L(p, q)$ ist eine dreidimensionale kompakte analytische Mannigfaltigkeit und $L(2, 1) \cong P_3(\mathbb{R})$. $L(2, 1)$ besitzt also eine analytische zelluläre Zerlegung.

Theorem 5 Sei p ungerade, q coprime zu p .

Dann gibt es keine (endliche) analytische zelluläre Zerlegung von $L(p, q)$.

Beweis

Für jede abelsche Gruppe G sei $G_p := G/pG$ mit $pG := \{pg \mid g \in G\}$ und $T_p(G) := \{g \in G \mid pg = 0\}$. Nach Hu [37] sind die Homologiegruppen von $L(p, q)$ mit Koeffizienten in G gegeben durch:

$$H_i(L(p, q); G) = \begin{cases} G & \text{für } i = 0 \\ G_p & \text{für } i = 1 \\ T_p(G) & \text{für } i = 2 \\ G & \text{für } i = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Daraus folgt für $G = \mathbb{Z}_2$:

$$H_i(L(p,q);\mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{für } i = 1 \\ 0 & \text{für } i = 2 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{für } i = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also $H_i(L(p,q);\mathbb{Z}_2) = H_i(S^3;\mathbb{Z}_2)$ für alle $i \geq 0$. Nach Theorem 4 existiert daher keine endliche analytische zelluläre Zerlegung von $L(p,q)$.



Die folgende Definition schwächt den Begriff "analytische zelluläre Zerlegung" ab:

Definition

Eine Zerlegung $(X_i)_{i \in I}$ eines lokalkompakten Raumes X in disjunkte Teilmengen heißt zellulär, wenn

- 1) $(X_i)_{i \in I}$ ist lokal endlich und X_i homöomorph zu einem $\mathbb{R}^{n_i}$.
- 2) $\overline{X_i} - X_i$ ist Vereinigung von Zellen X_j , $\dim X_j < \dim X_i$.

In dieser Allgemeinheit läßt sich a priori wenig über die Homologiegruppen von X aussagen. Insbesondere hat die Anzahl der Zellen

$$b_q(X) := \text{card} \{ i \in I \mid \text{codim } X_i = q \}$$

einer festen Kodimension q keine topologische Bedeutung.

Das folgende Theorem ist implizit in Massey [41] enthalten; ein expliziter Beweis ist mir jedoch nicht bekannt.

Theorem 6 (Massey)

Sei X eine orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit und $(X_i)_{i \in I}$ eine endliche zelluläre Zerlegung von X . Wenn alle Zellen X_i gerade Dimension haben, dann gilt für alle $q \geq 0$:

$$H_q(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_q(X)}$$

Beweis

Wir folgen Massey [41].

Sei K^q die Vereinigung aller Zellen X_i mit $\dim X_i \leq q$; $K := (K^q)_{q \geq 0}$.
Definiere

$$C^q(K) := H_C^q(K^q - K^{q-1}; \mathbb{Z}) ,$$

wobei $H_C^q(X; \mathbb{Z})$ die Alexander - Spanier Kohomology mit kompaktem Träger bezeichnet, wie sie in [41], Ch. 1 definiert ist. Daher gilt

$$C^q(K) = \{0\} \quad \text{für } q \text{ ungerade} .$$

Massey führt in [41], Ch. 3 einen Koketten Komplex $\{C^q(K), \delta^q\}$ an, wobei $\delta^q: C^q(K) \rightarrow C^{q+1}(K)$ gewisse Gruppenhomomorphismen sind.
Mit

$$Z^q(K) := \text{Ker } \delta^q ,$$

$$B^q(K) := \text{Im } \delta^{q-1} ,$$

$$b'_q(K) := \text{card} \{ i \in I \mid \dim X_i = q \}$$

erhalten wir

$$Z^q(K)/B^q(K) \cong \mathbb{Z}^{b'_q(K)} .$$

Nach Massey [41] Thm. 3.3 ist

$$H_C^q(X; \mathbb{Z}) \cong Z^q(K)/B^q(K) .$$

Also folgt mit Poincaré Dualität [41] Thm. 11.2, $n := \dim X$,

$$H_q(X; \mathbb{Z}) \cong H_C^{n-q}(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b'_{n-q}(K)} = \mathbb{Z}^{b_q(X)} .$$



1.3 Ein Lemma aus der Topologie

Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit der Dimension n und $S = \bigcup_{i=1}^s S_i$ eine endliche Vereinigung von Untermannigfaltigkeiten S_i von M . S sei abgeschlossen in M mit Kodimension

$$d := \text{codim } S := n - \max\{\dim S_j \mid j = 1, \dots, s\} \geq 2.$$

Sei $\pi_i(X)$ die i -te Homotopiegruppe eines topologischen Raumes X (bezüglich eines Basispunktes $x_0 \in X$; um Schreibarbeit zu sparen, führen wir den im folgenden nicht extra mit an).

Lemma 1

Die Inklusionsabbildung $\text{inc}: M - S \rightarrow M$ induziert für $0 \leq i \leq d - 2$ einen Isomorphismus $\text{inc}_*: \pi_i(M - S) \rightarrow \pi_i(M)$ und einen Epimorphismus $\text{inc}_*: \pi_{d-1}(M - S) \rightarrow \pi_{d-1}(M)$.

Beweis

Sei $d_j \geq d$ die Kodimension von S_j in M . Wir zeigen zuerst, daß $\text{inc}_*: \pi_i(M - S) \rightarrow \pi_i(M)$ surjektiv ist für alle $0 \leq i \leq d - 1$.

Nach Hirsch [36], Ch. 5, Lemma 1.5, enthält jede Homotopieklasse

$[f] \in \pi_i(M)$ einen C^∞ Repräsentanten $f: S^i \rightarrow M$. Nach dem Transversalitätssatz, Hirsch [36], Ch. 3, gibt es in jeder Umgebung $U \subset C_W^\infty(S^i, M)$ von f (bezüglich der schwachen Topologie auf $C^\infty(S^i, M)$) eine C^∞ Abbildung $g \in U \subset C_W^\infty(S^i, M)$, so daß g zu allen Untermannigfaltigkeiten $S_1, \dots, S_s$ transversal ist. Wählt man U genügend klein, so folgt wieder aus Hirsch [36], Lemma 1.5:

- (a) g ist homotop zu f
- (b) $g(S^i) \cap S_j = \emptyset$ für alle $0 \leq i \leq d_j - 1$, $1 \leq j \leq s$.

Für alle $0 \leq i \leq d - 1$ ist daher $g(S^i) \subset M - S$ und $\text{inc}_*([g]) = [f]$.

Q.E.D.

Wir zeigen jetzt, daß $\text{inc}_*: \pi_i(M - S) \rightarrow \pi_i(M)$ injektiv ist für alle $0 \leq i \leq d - 2$.

Sei dazu $f: S^i \rightarrow M - S$ ein C^∞ Repräsentant der Homotopieklasse $[f] \in \pi_i(M - S)$, $a \in M - S$ und

$$H: S^i \times [0,1] \rightarrow M$$

eine (stetige) Homotopie von $\text{inc} \circ f$ mit der konstanten Abbildung $\text{inc} \circ g$, $g: S^i \rightarrow M - S$, $g(x) \equiv a$ für alle $x \in S^i$. Da - bezüglich der schwachen Topologie - $C^\infty(X,Y)$ dicht in $C^0(X,Y)$ ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $H \in C^\infty$ ist.

$\text{inc} \circ f$ und $\text{inc} \circ g$ sind transversal zu allen Untermannigfaltigkeiten S_j , $j = 1, \dots, s$, und nach dem Transversalitätssatz (Guillemin, Pollack [23]) existiert daher eine C^∞ Abbildung

$$\tilde{H}: S^i \times [0,1] \rightarrow M$$

mit:

- (a) $\tilde{H} = H$ auf $S^i \times \{0,1\}$
- (b) $\tilde{H}$ ist transversal zu S_j für alle $1 \leq j \leq s$.

Wegen

$$\dim(S^i \times [0,1]) = i + 1 \leq d - 1 \leq d_j - 1$$

für alle $1 \leq j \leq s$, ist (b) äquivalent zu

$$(b') \quad \tilde{H}(S^i \times [0,1]) \cap S_j = \emptyset \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq s, \text{ d.h.}$$

$$\tilde{H}(S^i \times [0,1]) \subset M - S.$$

$\tilde{H}$ liefert daher die gesuchte Homotopie $\tilde{H}: S^i \times [0,1] \rightarrow M - S$ von f mit g . Also folgt aus $\text{inc}_\star([f]) = 0$ in $\pi_i(M)$, daß $[f] = 0$ ist in $\pi_i(M - S)$ für alle $0 \leq i \leq d - 2$.



Sei M nun zusätzlich noch zusammenhängend. Aus dem Whitehead - Satz folgt aus Lemma 1 für jeden Koeffizientenring R :

Lemma 2

Die Inklusionsabbildung $\text{inc}: M - S \rightarrow M$ induziert für $0 \leq i \leq d - 2$ den Isomorphismus von Homologiegruppen $\text{inc}_*: H_i(M - S; R) \rightarrow H_i(M; R)$ und einen Epimorphismus $\text{inc}_*: H_{d-1}(M - S; R) \rightarrow H_{d-1}(M; R)$.



Whitehead - Satz (Spanier [52])

Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, so daß $f_*: \pi_i(M) \rightarrow \pi_i(N)$ ein Isomorphismus ist für $1 \leq i \leq k$ und surjektiv für $i = k$. Dann gilt für jeden Koeffizientenring R :

$$f_*: H_i(M; R) \rightarrow H_i(N; R)$$

ist ein Isomorphismus für $0 \leq i \leq k$ und surjektiv für $i = k$.



Diese Fassung des Whitehead - Satzes habe ich der kürzlich erschienenen Dissertation von Delchamps [18] entnommen, ebenso wie die Idee über den Whitehead - Satz Lemma 2 aus Lemma 1 abzuleiten. Mein ursprünglicher Beweis von Lemma 2 ging stattdessen sehr ähnlich wie der von Lemma 1. Delchamps beweist ebenfalls - unter etwas stärkeren Voraussetzungen (nämlich daß M offen in einem $\mathbb{R}^N$ sei) - Lemma 1 und ein entsprechendes Lemma 2. Auf diese beiden Lemmata bin ich aber unabhängig von Delchamps gekommen.

2. Der Raum der linearen Input - Zustand Systeme

Mit k bezeichnen wir im folgenden entweder den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Jedes zeitinvariante lineare Kontrollsystem der Form

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

mit $x(t) \in k^n$, $u(t) \in k^m$, $A \in k^{n \times n}$, $B \in k^{n \times m}$, $n, m \geq 1$ definiert genau einen Punkt (A, B) im Matrizenraum $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$. Zu jedem solchen Paar $(A, B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ ist die Erreichbarkeitsmatrix $R(A, B)$ definiert durch

$$R(A, B) := (B, AB, \dots, A^{n-1}B).$$

$R(A, B)$ ist also eine $n \times nm$ -Matrix mit der Eigenschaft, daß ihre Spalten $A^i b_j$, $i = 0, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m$, gerade den erreichbaren Unterraum des Systems (1) aufspannen.

Für jede natürliche Zahl $0 \leq r \leq n$ sei

$$S_{n,m}^r(k) := \left\{ (A, B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \mid \text{rg } R(A, B) = r \right\}$$

die Menge aller linearen Systeme (1) mit r -dimensionalem Erreichbarkeitsunterraum. $S_{n,m}^0(k)$ bzw. $S_{n,m}^n(k)$ ist dann die Klasse der freien Systeme (mit $B = 0$) bzw. die Klasse aller vollständig erreichbaren linearen Systeme (1); da wir in dieser Arbeit hauptsächlich an den erreichbaren Systemen interessiert sind, führen wir noch eine besondere Bezeichnung für sie ein:

$$\tilde{\Sigma}_{n,m}(k) := \left\{ (A, B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \mid \text{rg } R(A, B) = n \right\}.$$

Den Matrizenraum $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ identifizieren wir stets mit dem $k^{n^2 + nm}$. Insbesondere hat $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ sowohl eine Mannigfaltigkeitsstruktur (differenzierbar für $k = \mathbb{R}$, komplexe für $k = \mathbb{C}$) als auch die Struktur einer affinen algebraischen Varietät, versehen mit der üblichen

Zariski - Topologie. In diesem Sinne ist die Menge aller nicht - erreichbaren Systeme

$$S_{n,m}(k) := \left\{ (A,B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \mid \operatorname{rg} R(A,B) < n \right\}$$

eine propere affine algebraische Teilvarietät von $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ und daher deren mengentheoretisches Komplement (Colocus) $\sum_{n,m}(k)$ Zariski - offen.

2.1 Strukturschichten linearer Systeme

Definition

Eine Kombination der Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ ist ein m - Tupel ganzer Zahlen $K = (K_1, \dots, K_m)$, $K_i \geq 0$, mit $K_1 + \dots + K_m = r$. m heißt die Länge der Kombination K und $|K| := \sum_{i=1}^m K_i$ das Gewicht von K .

Die Kombinationen K mit fester Länge m und Gewicht r bilden eine endliche Menge

$$K_{r,m} := \left\{ K \in \mathbb{Z}^m \mid K_i \geq 0, \sum_{i=1}^m K_i = r \right\},$$

deren Anzahl gegeben ist durch

$$\operatorname{card} K_{r,m} = \binom{r+m-1}{r} = (r+m-1)! / r!(m-1)!.$$

Man kann sich Kombinationen $(K_1, \dots, K_m)$ durch sogenannte Ferrer - Diagramme (auch Young - Diagramme genannt) veranschaulichen, indem man ebene Blöcke der Längen $K_1, \dots, K_m$ nebeneinander setzt.

Beispiel 1

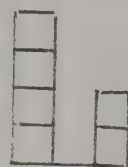
Sei $m = 3$ und $r = 6$. Die Kombinationen $(2,1,3)$, $(1,2,3)$ und $(4,0,2)$ entsprechen den Ferrer - Diagrammen



$(2,1,3)$



$(1,2,3)$



$(4,0,2)$

Für unsere Zwecke wichtig sind gewisse Totalordnungen auf der endlichen Menge $\underline{n} \times \bar{m} := \{0, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$. Der folgende Begriff stammt von Hinrichsen und Prätzel - Wolters [35]:

Definition

Eine Totalordnung $\leq$ auf $\underline{n} \times \bar{m}$ heißt eine schöne Ordnung, wenn zusätzlich zu den Ordnungsaxiomen gilt

$$(2.1.a) \quad i \leq k \Rightarrow (i, j) \leq (k, j) \quad \text{für alle } j = 1, \dots, m$$

$$(2.1.b) \quad (i, j) \leq (k, l) \Rightarrow (i+1, j) \leq (k+1, l) \quad \text{für alle } 0 \leq i, k < n.$$

Wir schreiben $(i, j) < (k, l)$, falls $(i, j) \leq (k, l)$ und $(i, j) \neq (k, l)$.

Beispiele schöner Ordnungen auf $\underline{n} \times \bar{m}$ sind:

Beispiel 2

Die lexikographische Ordnung oder Kronecker Ordnung ist definiert durch

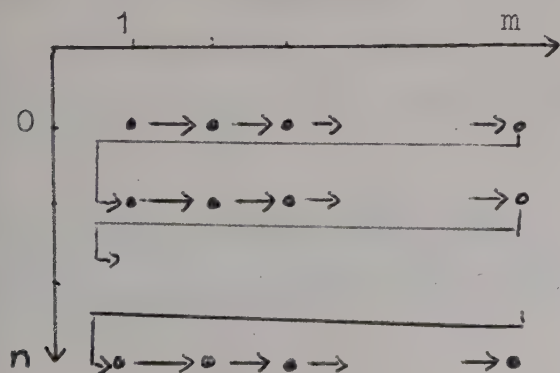
$$(2.1.1) \quad (i, j) \leq (k, l) : \Leftrightarrow \begin{cases} i < k & \text{oder} \\ i = k \text{ und } j \leq l \end{cases}.$$

Beispiel 3

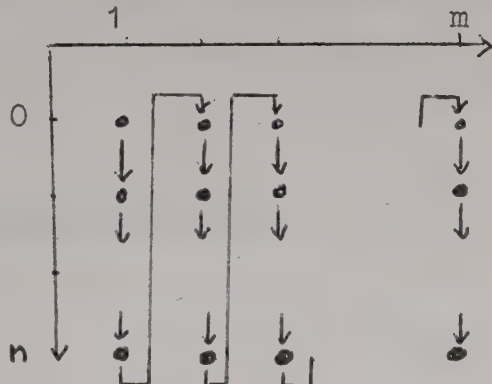
Die Hermite Ordnung auf $\underline{n} \times \bar{m}$ ist definiert durch

$$(2.1.2) \quad (i, j) \leq (k, l) : \Leftrightarrow \begin{cases} j < l & \text{oder} \\ j = l \text{ und } i \leq k \end{cases}.$$

Man kann sich diese beiden Ordnungen durch jeweils einen "schönen Weg" in der Menge $\underline{n} \times \bar{m}$ veranschaulichen [35]:



Kronecker Ordnung



Hermite Ordnung

Zu jeder schönen Ordnung $\leq$ auf $\underline{n} \times \bar{m}$ gehört ferner ein spezifisches Streichverfahren für die Spaltenvektoren der Erreichbarkeitsmatrix [35]. Sei dazu $(A,B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ vorgegeben und $b_1, \dots, b_m$ die erste, ..., m-te Spalte der Matrix B.

Streiche in der Liste $(A^i b_j)_{i \in \underline{n}, j \in \bar{m}}$ von nm Vektoren des k^n alle Vektoren $A^k b_1$ heraus, die linear abhängig sind von den Vektoren der Vorgängermenge

$$(2.1.3) \quad \text{Vor}(k,1) := \{ A^i b_j \mid (i,j) < (k,1) \} .$$

Ordnet man nun die nach diesem Streichverfahren übrigbleibenden Vektoren bezüglich der Hermite Ordnung an, so erhält man aufgrund der Eigenschaften (2.1.a), (2.1.b) eine Liste der Gestalt

$$(b_1, \dots, A^{K_1-1} b_1, \dots, b_m, \dots, A^{K_m-1} b_m) ,$$

mit gewissen nicht - negativen ganzen Zahlen $K_1, \dots, K_m$, die von (A,B) und der schönen Ordnung $\leq$ abhängen [35].

Das m - Tupel $K = (K_1, \dots, K_m)$ heißt die Liste der Strukturindizes von (A,B) bezüglich $\leq$. Ist $\leq$ die Kronecker Ordnung bzw. die Hermite Ordnung, so nennen wir die zu (A,B) gehörenden Strukturindizes $K_1, \dots, K_m$ die Kronecker Indizes bzw. die Hermite Indizes von (A,B) .

Symbolisch geschrieben erhalten wir die Kronecker Indizes also durch das Streichverfahren

$$b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_m \rightarrow Ab_1 \rightarrow \dots \rightarrow Ab_m \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1} b_1 \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1} b_m ,$$

während die Hermite Indizes durch das Streichverfahren

$$b_1 \rightarrow Ab_1 \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1} b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_m \rightarrow Ab_m \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1} b_m$$

definiert sind.

Für ein gegebenes System $(A,B) \in S_{n,m}^r(k)$ und eine schöne Ordnung $\leq$ auf $\underline{n} \times \bar{m}$ ist die Liste $(K_1, \dots, K_m)$ der Strukturindizes von (A,B) eine Kombination von r :

$$K_1 + \dots + K_m = r .$$

Dabei können auch alle Kombinationen $K \in K_{r,m}$ vorkommen:

Lemma 1

Für $0 \leq r \leq n$ sei $(K_1, \dots, K_m) \in K_{r,m}$ eine Kombination und $\leq$ eine schöne Ordnung auf $\underline{n} \times \bar{m}$. Dann existiert ein System $(A, B) \in S_{n,m}^r(k)$ mit Strukturindizes $(K_1, \dots, K_m)$ bezüglich $\leq$.

Beweis

Bezeichne mit e_k den k -ten Standardbasisvektor $(0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ des k^n . Sei $d_{ij} := \text{card}\{(k, l) \in \underline{n} \times \bar{m} \mid k \leq K_1 - 1, (k, l) \leq (i, j)\}$. Durch

$$A^i b_j := e_{d_{ij}} \quad \text{für } 0 \leq i \leq K_j - 1, j \in \bar{m}, \quad A^{K_j} b_j := 0, j \in \bar{m},$$

sind eindeutig bestimmte 0-1 Matrizen $A \in k^{n \times n}$, $B \in k^{n \times m}$ definiert.

Da $A^{K_j} b_j = 0$ für alle $j \in \bar{m}$, folgt

$$\text{rg}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = r,$$

d.h. $(A, B) \in S_{n,m}^r(k)$. Nach Konstruktion hat das Paar (A, B) auch die richtigen Indizes $(K_1, \dots, K_m)$. (//)

Zu jeder schönen Ordnung $\leq$ auf $\underline{n} \times \bar{m}$ und jedem $K = (K_1, \dots, K_m) \in \mathbb{N}_0^m$ sei

$$S_{n,m}^K(k) := \left\{ (A, B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \mid (A, B) \text{ hat Strukturindizes } K \text{ bezüglich } \leq \right\}$$

die Menge aller linearen Systeme (1) mit vorgegebenen Strukturindizes $(K_1, \dots, K_m)$. Wir nennen $S_{n,m}^K(k)$ eine Strukturschicht von $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ bezüglich $\leq$.

Ist $\leq$ die Kronecker Ordnung bzw. die Hermite Ordnung, so setzen wir:

$$\text{Kro}_K(k) := \left\{ (A, B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \mid (A, B) \text{ hat Kronecker Indizes } K \right\}$$

bzw.

$$\text{Her}_K(k) := \left\{ (A, B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \mid (A, B) \text{ hat Hermite Indizes } K \right\}$$

und nennen $\text{Kro}_K(k)$ bzw. $\text{Her}_K(k)$ eine Kronecker Schicht bzw. eine Hermite Schicht von $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$.

Nach Lemma 1 bilden die Strukturschichten $S_{n,m}^K(k)$ eine Zerlegung von $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$:

Lemma 2

Sei $K, L \in \mathbb{N}_0^m$ und $|K| \leq n, |L| \leq n$. Dann gilt:

- (a) $S_{n,m}^K(k) \neq \emptyset$
- (b) $S_{n,m}^K(k) \cap S_{n,m}^L(k) = \emptyset$ für $K \neq L$
- (c) $\bigcup_{K \in \mathbb{N}_0^m} S_{n,m}^K(k) = k^{n \times n} \times k^{n \times m}$
- (d) $\bigcup_{K \in K_{r,m}} S_{n,m}^K(k) = S_{n,m}^r(k)$



2.2 Topologie der Strukturschichten

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Topologie der Strukturschichten $S_{n,m}^K(k)$ von $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$. Zur verwendeten topologischen Terminologie vergleiche auch Dieudonné [20] oder Milnor/Stasheff [44]. Das Wort "differenzierbar" hat hier - je nach Kontext - zweierlei Bedeutung: Ist der Grundkörper $k = \mathbb{R}$, so meinen wir reell analytisch, während für $k = \mathbb{C}$ komplex analytisch oder holomorph gemeint ist.

2.2.1 Stiefel Mannigfaltigkeit und Fahnenbündel

Sei $1 \leq r \leq n$ fest.

Sei $V_{r,n}(k)$ die (nicht kompakte) Stiefel Mannigfaltigkeit aller r -Beine des k^n :

$$V_{r,n}(k) := \left\{ X \in k^{n \times r} \mid \text{rg } X = r \right\}.$$

$V_{r,n}(k)$ ist Zariski - offen in k^{nr} . Die Grassmann Mannigfaltigkeit $G_{r,n}(k)$ ist definiert als die Menge aller r -dimensionalen Unterräume des k^n . $G_{r,n}(k)$ ist eine kompakte Mannigfaltigkeit und die kanonische Projektion

$$\pi : V_{r,n}(k) \longrightarrow G_{r,n}(k)$$

$X \longmapsto$ Spaltenraum von X

ein differenzierbares $GL_n(k)$ - Hauptfaserbündel (Dieudonné [20]).

Auf $V_{r,n}(k)$ gibt es ein ausgezeichnetes triviales Vektorraumbündel, das wir mit $U_{r,n}$ bezeichnen. Es ist dadurch erklärt, daß die Faser von $U_{r,n}$ über einem Punkte $X \in V_{r,n}(k)$ gerade der von den r linear unabhängigen Spalten der Matrix X aufgespannte lineare Teilraum des k^n ist. $U_{r,n}$ ist Teilbündel des trivialen Bündels $E_{r,n} := V_{r,n}(k) \times k^n$ und besitzt damit, nach Wahl eines festen inneren Produktes auf k^n , ein Normalenbündel $U_{r,n}^\perp$ mit Bündelprojektion $p: U_{r,n}^\perp \rightarrow V_{r,n}(k)$. Die Fasern von $U_{r,n}^\perp$ sind also die orthogonalen Komplemente der Fasern von $U_{r,n}$. Die Menge aller Bündelhomomorphismen $h: U_{r,n}^\perp \rightarrow E_{r,n}$ über der Stiefel Mannigfaltigkeit $V_{r,n}(k)$:

$$\begin{array}{ccc} U_{r,n}^\perp & \xrightarrow{h} & E_{r,n} \\ p \searrow & & \swarrow pr_1 \\ & V_{r,n}(k) & \end{array}$$

bildet ein Vektorraumbündel $\text{Hom}(U_{r,n}^\perp, E_{r,n})$ über der Stiefel Mannigfaltigkeit $V_{r,n}(k)$. All diese Bündel tragen in kanonischer Weise die Struktur einer (differenzierbaren bzw. komplexen) Mannigfaltigkeit.

Wir fixieren nun eine schöne Ordnung $\leq$ auf $\underline{n} \times \bar{m}$ und wählen eine Kombination $K \in K_{r,m}$.

Zu jeder natürlichen Zahl $1 \leq l \leq m$ sei

$$(2.2.1) \quad I_l := \left\{ (i,j) \in \underline{n} \times \bar{m} \mid i < K_j \text{ und } (i,j) < (K_l, 1) \right\}$$

die Indexmenge aller Vorgänger von $A^{K_l} b_l$ in der Liste

$$\left\{ b_1, \dots, A^{K_1-1} b_1, \dots, b_m, \dots, A^{K_m-1} b_m \right\} ;$$

dabei ist (A, B) irgendein Element von $S_{n,m}^K(k)$. Setze

$$(2.2.2) \quad n_1(K) = n_1 := \text{card } I_1 .$$

Da für $1 < 1'$ entweder $(K_1, 1) < (K_1, 1')$ oder $(K_1, 1') < (K_1, 1)$ gilt, gibt es eine Permutation $p: \bar{m} \rightarrow \bar{m}$, so daß

$$(2.2.3) \quad I_{p(1)} \subset I_{p(2)} \subset \dots \subset I_{p(m)} .$$

p ist i.allg. nicht eindeutig bestimmt und sowohl von der schönen Ordnung als auch von der Kombination K anhängig.

Wir führen eine Fahnenmannigfaltigkeit zu K ein, indem wir setzen:

$$\text{Flag}_{n,m}(K) := \left\{ (V_1, \dots, V_m) \in G_{n_{p(1)}, n}^{(k)} \times \dots \times G_{n_{p(m)}, n}^{(k)} \mid V_1 \subset \dots \subset V_m \right\}$$

$\text{Flag}_{n,m}(K)$ ist eine kompakte Mannigfaltigkeit (Stoll [53]) und trägt ein ausgezeichnetes Vektorraumbündel $F_{n,m}(K)$, welches dadurch erklärt ist, daß die Faser an einem Punkte $(V_1, \dots, V_m) \in \text{Flag}_{n,m}(K)$ gerade der Unterraum $V_1 \times \dots \times V_m$ von $k^{n \times m}$ ist .

Wir konstruieren nun ein Fahnenbündel $F_{n,m}^K$ über der Stiefel Mannigfaltigkeit $V_{r,n}(k)$:

Dazu schreiben wir mit der Kombination $K \in K_{r,m}$ jedes r - Tupel $X \in V_{r,n}(k)$ linear unabhängiger Vektoren des k^n in der folgenden Weise um:

$$X = (X_1^0, \dots, X_1^{K_1-1}, \dots, X_m^0, \dots, X_m^{K_m-1}) ,$$

was wegen $|K| = r$ offenbar geht. Die hochgestellten Indizes verwenden wir dabei nur aus schreibtechnischen Gründen.

Für jedes $X \in V_{r,n}(k)$ setze für $1 \leq l \leq m$:

$$(2.2.4) \quad V_l(X) := \text{Span} \left\{ X_j^i \in k^n \mid (i, j) \in I_{p(l)} \right\}$$

und

$$(2.2.5) \quad V(X) := (V_1(X), \dots, V_m(X)) \in \text{Flag}_{n,m}(K) .$$

Dies liefert eine differenzierbare Abbildung

$$V: V_{r,n}(k) \rightarrow \text{Flag}_{n,m}(K) \quad , \quad X \mapsto V(X)$$

und durch Zurückziehen des Bündels $F_{n,m}(K)$ mittels V ein differenzierbares Vektorraumbündel

$$(2.2.6) \quad F_{n,m}^K := V^!(F_{n,m}(K))$$

auf der Stiefel Mannigfaltigkeit $V_{r,n}(k)$ mit Bündelprojektion

$$(2.2.7) \quad \vartheta: F_{n,m}^K \rightarrow V_{r,n}(k) \quad .$$

Dies ist das gesuchte Fahnenbündel.

Lemma 1

Das Bündel $F_{n,m}^K$ ist differenzierbar trivial über $V_{r,n}(k)$.

Beweis

Die Abbildung $t: V_{r,n}(k) \times k^{n_1 + \dots + n_m} \rightarrow F_{n,m}^K$, gegeben durch

$$\begin{aligned} & ((x_1^0, \dots, x_1^{K_1-1}, \dots, x_m^0, \dots, x_m^{K_m-1}); (r_{ij}^1)_{(i,j) \in I_{p(1)}}, \dots, (r_{ij}^m)_{(i,j) \in I_{p(m)}}) \\ & \mapsto ((x_1^0, \dots, x_1^{K_1-1}, \dots, x_m^0, \dots, x_m^{K_m-1}); (v_1, \dots, v_m)) \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad v_l := \sum_{(i,j) \in I_{p(l)}} r_{ij}^l x_j^i \quad , \quad l = 1, \dots, m \quad ,$$

ist eine differenzierbare Trivialisierung.



Wir berechnen jetzt die Dimension der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $F_{n,m}^K$ über k . Sei dazu wie gehabt $K \in K_{r,m}$ eine Kombination und $\leq$ eine schöne Ordnung auf $\underline{n} \times \bar{m}$. Nach (2.2.2) ist n_1 gegeben durch

$$n_1 = \text{card} \left\{ (i,j) \in \underline{n} \times \bar{m} \mid i < K_j \text{ und } (i,j) < (K_1, 1) \right\} \quad .$$

Lemma 2

$$\dim_k F_{n,m}^K = rn + \sum_{l=1}^m n_l .$$

Beweis

Nach (2.2.6) gilt:

$$\begin{aligned} \dim_k F_{n,m}^K &= rn + (n_{p(1)} + \dots + n_{p(m)}) \\ &= rn + n_1 + \dots + n_m , \end{aligned}$$

wobei $p = (p(1), \dots, p(m))$ die Permutation gemäß (2.2.3) ist. (//)

Durch Bildung der Whitney Summe erhalten wir ein differenzierbares Vektorraumbündel

$$\mathcal{G}_{n,m}^K := F_{n,m}^K \oplus \text{Hom}(U_{r,n}^\perp, E_{r,n})$$

über der Stiefel Mannigfaltigkeit $V_{r,n}(k)$ mit Projektionsabbildung

$$q: \mathcal{G}_{n,m}^K \rightarrow V_{r,n}(k) .$$

Nach Lemma 2 ist $\mathcal{G}_{n,m}^K$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension

Lemma 3

$$\dim_k \mathcal{G}_{n,m}^K = n(n-r) + \dim_k F_{n,m}^K = n^2 + \sum_{l=1}^m n_l .$$
(//)

2.2.2 Strukturschichten als Faserbündel

Definition

Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und M Untermannigfaltigkeit von k^d . Ein differenzierbares Faserbündel $f: M \rightarrow N$ heißt affin, wenn für alle $y \in N$ die Fasern $f^{-1}(y)$ affine Teilräume von k^d sind.

Sei $1 \leq r \leq n$, $K \in K_{r,m}$ Kombination und $\leq$ eine schöne Ordnung auf $\underline{n} \times \overline{m}$.

Theorem 1

Die Strukturschicht $S_{n,m}^K(k)$ ist eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ der Dimension (über k) $n^2 + n_1 + \dots + n_m$.

Durch

$$f: S_{n,m}^K(k) \longrightarrow V_{r,n}(k)$$

$$(A, B) \longmapsto (b_1, \dots, A^{K_1-1} b_1, \dots, b_m, \dots, A^{K_m-1} b_m)$$

ist $S_{n,m}^K(k)$ ein affines Faserbündel über der Stiefel Mannigfaltigkeit $V_{r,n}(k)$, welches diffeomorph ist zu dem Vektorraumbündel $\mathcal{G}_{n,m}^K$.

Um Theorem 1 beweisen zu können, formulieren wir einen Hilfssatz.

Sei dazu für jeden linearen Operator $A: k^n \rightarrow k^n$ und für jedes r -Bein $X \in V_{r,n}(k)$ des k^n

$$A_X := A|_{\langle X \rangle^\perp}$$

die Einschränkung von A auf den orthogonalen Komplementärraum $\langle X \rangle^\perp$ des Spaltenraumes von X .

Setze

$$(2.2.8) \quad R_K(A, B) := (b_1, \dots, A^{K_1-1} b_1, \dots, b_m, \dots, A^{K_m-1} b_m) .$$

Die Menge

$$N_K := \{ (A, B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \mid \text{rg } R_K(A, B) = r \}$$

ist eine Zariski - offene Umgebung von $S_{n,m}^K(k)$ in $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$.

Mit $mE_{r,n} := E_{r,n} \oplus \dots \oplus E_{r,n}$ m -fache Whitney Summe gilt

Lemma 4

Die Abbildung $G: N_K \longrightarrow mE_{r,n} \oplus \text{Hom}(U_{r,n}^\perp, E_{r,n})$

$$(A, B) \longmapsto (\underbrace{R_K(A, B)}_{\text{Fußpunkt}}, \underbrace{(A^{K_1-1} b_1, \dots, A^{K_m-1} b_m)}_{\text{Fasern des Bündels}}, \underbrace{A_{R_K(A, B)}}_{\text{Bündels}})$$

ist ein Diffeomorphismus.

Beweis

(1) G ist injektiv:

Aus $G(A, B) = G(A', B')$ folgt $B = B'$ und die Abbildungen A, A' stimmen auf

$$\langle b_1, \dots, A^{K_1-1} b_1, \dots, b_m, \dots, A^{K_m-1} b_m \rangle \perp \langle b_1, \dots, A^{K_1-1} b_1, \dots, b_m, \dots, A^{K_m-1} b_m \rangle \\ = k^n$$

überein. Also folgt auch $A = A'$.

(2) G ist surjektiv:

Sei $(X; (v_1, \dots, v_m), A_0) \in {}^m E_{r,n} \oplus \text{Hom}(U_{r,n}^\perp, E_{r,n})$ gegeben. Wir numerieren die Spalten von $X \in V_{r,n}(k)$ um gemäß

$$X = (X_1^0, \dots, X_1^{K_1-1}, \dots, X_m^0, \dots, X_m^{K_m-1})$$

und setzen für jedes $j \in \bar{m}$:

a) für $K_j = 0$

$$b_j := v_j$$

b) für $K_j \geq 1$

$$b_j := X_j^0, \quad AX_j^0 := X_j^1, \quad \dots, \quad AX_j^{K_j-2} := X_j^{K_j-1}, \quad AX_j^{K_j-1} := v_j.$$

Damit ist A auf dem Spaltenraum von X erklärt. Durch die Festsetzung

$$c) \quad A|_{\langle X \rangle^\perp} := A_0, \quad B := (b_1, \dots, b_m)$$

sind eindeutig bestimmte lineare Abbildungen $A: k^n \rightarrow k^n$, $B: k^m \rightarrow k^n$ definiert, die wir - bezüglich der Standardbasis des k^n , k^m - mit dem Matrizenpaar $(A, B) \in N_K$ identifizieren. Nach Konstruktion gilt $G(A, B) = (X; (v_1, \dots, v_m), A_0)$.

(3) Die Differenzierbarkeit von G ist klar.

(4) G^{-1} ist differenzierbar:

Wähle $X_0 \in V_{r,n}(k)$ fest. Da das Bündel $U_{r,n} \rightarrow V_{r,n}(k)$ lokal trivial ist

gibt es eine offene Umgebung $\Omega \subset V_{r,n}(k)$ von X_0 und $n - r$ differenzierbare Schnitte

$$s_i: \Omega \rightarrow U_{r,n}^\perp, \quad i = 1, \dots, n-r,$$

so daß für alle $X \in \Omega$ die $n \times n$ - Matrix

$$S(X) := (X, s_1(X), \dots, s_{n-r}(X)) \in k^{n \times n}$$

invertierbar ist.

Sei $F_{r,n}$ die Einschränkung des Bündels $mE_{r,n} \oplus \text{Hom}(U_{r,n}^\perp, E_{r,n})$ auf Ω ; $F_{r,n}$ ist also offen in $mE_{r,n} \oplus \text{Hom}(U_{r,n}^\perp, E_{r,n})$.

Zu jedem $X = (X_1, \dots, X_r) \in \Omega$ und jeder Matrix

$$a := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-r} \end{bmatrix} \in k^{n \times (n-r)}$$

sei $A_0(a): \langle X_1, \dots, X_r \rangle^\perp \rightarrow k^n$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$(2.2.9) \quad A_0(a)s_i(X) := \sum_{j=1}^r a_{ji}X_j + \sum_{j=r+1}^n a_{ji}s_{j-r}(X), \quad i = 1, \dots, n-r.$$

Zu jeder Matrix

$$V := \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nm} \end{bmatrix} \in k^{n \times m}$$

und jedem $j \in \bar{m}$ setze

$$(2.2.10) \quad v_j := \sum_{l=1}^r v_{lj}X_l + \sum_{l=r+1}^n v_{lj}s_{l-r}(X).$$

Dann gibt

$$\tau: \Omega \times k^{n \times m} \times k^{n \times (n-r)} \longrightarrow F_{r,n}$$

$$(X; V, a) \longmapsto (X; (v_1, \dots, v_m), A_0(a))$$

eine differenzierbare Trivialisierung von $F_{r,n}$. Also ist G^{-1} genau

dann differenzierbar auf $F_{r,n}$, wenn $H := G^{-1} \circ \tau$ differenzierbar ist. Wegen (2.2.9), (2.2.10) ist $H(X;V,a) := (H_1, H_2) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} H_1 &= S(X) [A_1, \dots, A_m, a] S(X)^{-1}, \quad A_j \in k^{n \times K_j}, \quad j \in \bar{m}, \\ H_2 &= S(X) [h_1, \dots, h_m], \quad h_j \in k^n, \quad j \in \bar{m} \end{aligned}$$

mit

(i) für $K_j = 0$

$$h_j := \begin{bmatrix} v_{1j} \\ \vdots \\ v_{nj} \end{bmatrix}, \quad A_j \text{ ohne Einträge}$$

(ii) für $K_j \geq 1$

$$h_j := \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j, \quad A_j := \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & v_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & v_{nj} \end{bmatrix}}_{K_j} \begin{aligned} &\leftarrow K_1 + \dots + K_{j-1} + 2 \\ &\leftarrow K_1 + \dots + K_{j-1} + K_j \end{aligned}$$

Insbesondere ist H differenzierbar, d.h. reell oder komplex analytisch.

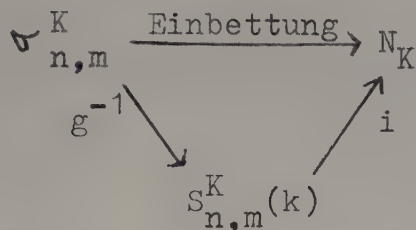


Beweis von Theorem 1

Mit der kanonischen Inklusionsabbildung $i: S_{n,m}^K(k) \rightarrow N_K$ und der Einbettung $j: \mathfrak{S}_{n,m}^K \rightarrow mE_{r,n} \oplus \text{Hom}(U_{r,n}^\perp, E_{r,n})$ haben wir ein kommutatives Diagramm stetiger Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} N_K & \xrightarrow{G} & mE_{r,n} \oplus \text{Hom}(U_{r,n}^\perp, E_{r,n}) \\ \uparrow i & & \uparrow j \\ SK & \xrightarrow{(k)} & \mathfrak{S}_{n,m}^K \end{array}$$

Dabei ist $g := G|_{S_{n,m}^K(k)}$ eine Bijektion, i ist stetig bezüglich der Teilraumtopologie von $S_{n,m}^K(k)$ und $G^{-1} \circ j$ ist eine differenzierbare Einbettung. Also haben wir auch ein kommutatives Diagramm

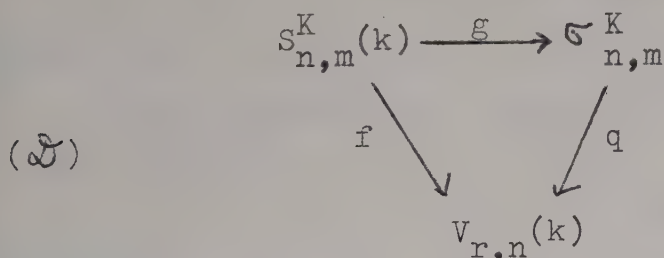


Es gibt eine eindeutig bestimmte differenzierbare Struktur auf $S_{n,m}^K(k)$, bezüglich der die Bijektion g ein Diffeomorphismus ist, cf. Dieudonné [20]. Aus dem zweiten Diagramm ergibt sich, daß dann die Inklusionsabbildung i bezüglich dieser differenzierbaren Struktur auf $S_{n,m}^K(k)$ eine Einbettung ist. Damit haben wir gezeigt:

1) $S_{n,m}^K(k)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ und die Abbildung $g: S_{n,m}^K(k) \rightarrow \mathfrak{S}_{n,m}^K$ ein Diffeomorphismus. Insbesondere gilt nach Lemma 2.2.3

$$\dim_k S_{n,m}^K(k) = \dim_k \mathfrak{S}_{n,m}^K = n^2 + n_1 + \dots + n_m.$$

2) Das Diagramm



mit $f(A,B) = R_K(A,B)$ ist kommutativ. Da $q: \mathfrak{S}_{n,m}^K \rightarrow V_{r,n}(k)$ ein Faserbündel ist, ist auch $f: S_{n,m}^K(k) \rightarrow V_{r,n}(k)$ ein Faserbündel.

Zu jedem r - Bein

$$X = (X_1^0, \dots, X_1^{K_1-1}, \dots, X_m^0, \dots, X_m^{K_m-1})$$

des k^n sei $N: k^n \rightarrow k^n$ der nilpotente Operator gegeben durch

$$NX_j^0 := X_j^1, \dots, NX_j^{K_j-2} := X_j^{K_j-1}, NX_j^{K_j-1} := 0 \text{ für } j \in \bar{m}$$

$$N = 0 \text{ auf } \langle X \rangle^\perp.$$

Seien $1 \leq j_1 < \dots < j_t \leq m$ die Indizes j mit $K_j \geq 1$. Setze $B := (b_1, \dots, b_m)$ mit

$$b_j := \begin{cases} X_j^0 & \text{für } j \in \{j_1, \dots, j_t\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Sei L_K der lineare Teilraum des $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$, bestehend aus allen Paaren $(A, (\beta_1, \dots, \beta_m)) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ mit:

$$(a) \quad A = 0 \text{ auf } \langle X_1^0, \dots, X_1^{K_1-2}, \dots, X_m^0, \dots, X_m^{K_m-2} \rangle$$

$$AX_j^{K_j-1} \in \langle X_1^i \mid i < K_1, (i, 1) < (K_j, j) \rangle$$

$$(b) \quad \beta_j = 0 \text{ für } j \in \{j_1, \dots, j_t\}, \beta_j \in \langle X_1^i \mid i < K_1, (i, 1) < (0, j) \rangle \text{ sonst}$$

Damit ist $f^{-1}(X)$ gleich dem affinen Teilraum

$$(N, B) + L_K$$

und Theorem 1 bewiesen. ⊙

Nach Theorem 1 besteht ein sehr enger Zusammenhang zwischen der Topologie der Strukturschichten $S_{n,m}^K(k)$ und der Stiefel Mannigfaltigkeit $V_{r,n}(k)$. Der folgende Satz präzisiert diesen Zusammenhang.

Theorem 2 Sei $K \in K_{r,m}$ Kombination.

a) $S_{n,m}^K(k)$ ist zusammenhängend für $1 \leq r \leq n-1$.

b) Für $1 \leq r \leq n$ hat $S_{n,m}^K(k)$ den gleichen Homotopietyp wie die Stiefel Mannigfaltigkeit $V_{r,n}(k)$; insbesondere sind die Kohomologieringe isomorph:

$$H^*(S_{n,m}^K(k); \mathbb{Z}) \cong H^*(V_{r,n}(k); \mathbb{Z}).$$

Beweis

a) folgt daraus, daß die Stiefel Mannigfaltigkeit $V_{r,n}(k)$ für $1 \leq r \leq n-1$ zusammenhängend ist; ist $k = \mathbb{C}$, so gilt dies sogar noch für $r = n$.

Also ist auch das affine Bündel $S_{n,m}^K(k)$ über $V_{r,n}(k)$ zusammenhängend.

b) Nach Theorem 1 ist $V_{r,n}(k)$ ein Deformationsretrakt von $S_{n,m}^K(k)$,
daraus folgt die Behauptung. (//)

Bemerkung

Der mod 2 Kohomologiering von $V_{r,n}(k)$ ist wohlbekannt; siehe z.B.
James [38].

2.2.3 Trivialität des Bündels $S_{n,m}^K(k)$

Da $S_{n,m}^K(k)$ Bündelstruktur hat, ist es naheliegend zu fragen, wann
dieses Bündel trivial ist. Wegen Theorem 2.2.1 kann man dieses Problem
auch so formulieren:

[Für welche Kombinationen K und natürlichen Zahlen n, m ist das
Vektorraumbündel $\mathcal{G}_{n,m}^K$ über der Stiefel Mannigfaltigkeit trivial?

1) $K \in K_{n,m}$:

In diesem Fall ist es klar, daß $\mathcal{G}_{n,m}^K$ trivial ist, denn $\mathcal{G}_{n,m}^K$ ist
gleich dem Bündel $F_{n,m}^K$, welches nach Lemma 2.2.1 für alle $|K| \leq n$
trivial ist. Insbesondere gilt daher (vgl. Def. 2.2.1):

Lemma 5 Sei $K \in K_{n,m}$ Kombination.

Das affine Bündel $S_{n,m}^K(k)$ ist differenzierbar trivial und $S_{n,m}^K(k)$
ist diffeomorph zu $GL_n(k) \times k^{n(K)}$, $n(K) = n_1 + \dots + n_m$. (//)

Beispiel:

Sei $m = 1$. Wir identifizieren die Kombination (n) mit n .

Die im Beweis von Lemma 2.2.1 angegebene Trivialisierung von $F_{n,m}^K$
spezialisiert sich hier zu der Trivialisierung von $U_{n,n}$:

$$t: GL_n(k) \times k^n \longrightarrow U_{n,n}$$

$$(*) \quad ((x_0, \dots, x_{n-1}); (r_0, \dots, r_{n-1})) \mapsto ((x_0, \dots, x_{n-1}); \sum_{i=0}^{n-1} r_i x_i) .$$

Sei $c_j(A)$ der j -te Koeffizient des charakteristischen Polynoms von $A \in k^{n \times n}$:

$$\det(sI - A) = s^n + c_{n-1}(A)s^{n-1} + \dots + c_0(A) .$$

Setze $c(A) := -(c_0(A), \dots, c_{n-1}(A)) \in k^n$.

Lemma 6

Die Trivialisierung $(*)$ von $U_{n,n}$ induziert die Trivialisierung

$$\tau : \tilde{\Sigma}_{n,1}(k) \rightarrow GL_n(k) \times k^n , \quad \tau(A,b) := (R(A,b); c(A))$$

von $\tilde{\Sigma}_{n,1}(k)$.

Beweis

Wir erinnern an das Diagramm $(\mathcal{D})$ in Abschnitt 2.2.2. Mit $\tau := g\sigma^{-1} = (\tau_1, \tau_2)$ erhalten wir offenbar eine Trivialisierung von $\tilde{\Sigma}_{n,1}(k)$ mit $\tau_1(A,b) \in GL_n(k)$, $\tau_2(A,b) \in k^n$. Wegen der Kommutativität von $(\mathcal{D})$ gilt

$$\tau_1(A,b) = f(A,b) = R(A,b) .$$

$\tau_2(A,b) = (c_0, \dots, c_{n-1})$ sind dann die eindeutig bestimmten Koeffizienten in der Darstellung

$$A^n b = c_0 b + c_1 A b + \dots + c_{n-1} A^{n-1} b .$$

Nach dem Satz von Cayley - Hamilton gilt dann $c_j = -c_j(A)$, $0 \leq j \leq n-1$.
Daher $\tau_2(A,b) = -(c_0(A), \dots, c_{n-1}(A)) = c(A)$.



Byrnes und Gauger [16] haben bemerkt, daß die Abbildung τ ein birationaler Isomorphismus ist, sind aber nicht auf den hier dargestellten Bündelzusammenhang eingegangen.

2) $K \in K_{n-1,m}$:

Lemma 7

Für $K \in K_{n-1,m}$ ist $\sigma_{n,m}^K$ differenzierbar trivial und daher $S_{n,m}^K(k)$

diffeomorph zu $V_{n-1,n}(k) \times k^{2n-1}$.

Beweis

Es genügt zu zeigen, daß $U_{n-1,n}^\perp$ trivial ist über $V_{n-1,n}(k)$. Dazu betrachten wir das äußere Produkt $\times$ auf dem k^n . Es hat die charakteristische Eigenschaft, daß für $x_1, \dots, x_{n-1} \in k^n$ und alle $x \in k^n$ gilt ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ inneres Produkt auf k^n):

$$\langle x, x_1 \times \dots \times x_{n-1} \rangle = \det(x, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Somit

$$\langle x_i, x_1 \times \dots \times x_{n-1} \rangle = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n-1.$$

Also ist

$$s: V_{n-1,n}(k) \times k \rightarrow U_{n-1,n}^\perp \\ ((x_1, \dots, x_{n-1}); r) \mapsto ((x_1, \dots, x_{n-1}); r(x_1 \times \dots \times x_{n-1}))$$

eine Trivialisierung von $U_{n-1,n}^\perp$.



Anmerkung

Nach einem allgemeinen Satz über Stiefel Mannigfaltigkeiten ist das Bündel $U_{r,n}^\perp$ über $V_{r,n}(\mathbb{R})$ genau dann trivial, wenn $r = n$ oder $r = n-1$ ist; James [38], p. 11, Theorem(1.17).

Bemerkung Sei $r < n$.

Sei $l \geq 0$ die Anzahl der äquivarianten Schnitte $s: V_{r,n}(\mathbb{R}) \rightarrow U_{r,n}^\perp$, d.h. der Schnitte s mit $s(gx) = gs(x)$ für alle $g \in O_n(\mathbb{R})$, $x \in V_{r,n}(\mathbb{R})$. Dann ist $l \geq 1$ nur für $r = n-1$ und dann automatisch $l = 1$.

Beweis

Betrachte $F: V_{r,n}(\mathbb{R}) \rightarrow V_{r+1,n}(\mathbb{R})$, $F(x) := (x, s_1(x), \dots, s_l(x))$, wobei $s_1, \dots, s_l$ die linear unabhängigen äquivarianten Schnitte von $U_{r,n}^\perp$ seien. Sei

$$\text{Stab}(x) := \{ g \in O_n(\mathbb{R}) \mid gx = x \}.$$

Dann sind $\text{Stab}(x)$ und $\text{Stab}(F(x))$ isomorph und haben daher die gleichen Dimensionen als Lie Gruppen. Wegen

$\dim \text{Stab}(x) = \binom{n-r}{2}$, $\dim \text{Stab}(F(x)) = \binom{n-r-1}{2}$ folgt also

$$\binom{n-r}{2} = \binom{n-r-1}{2} .$$

Daraus folgt aber sofort $n-r-1 = 0$ und $n-r = 1$. Also $r = n-1$ und $1 = 1$.

Man beachte schließlich, daß wir in diesem Beweis von keinerlei Stetigkeitsvoraussetzungen an s_i Gebrauch gemacht haben. 

3) Weitere Werte (r,n,m) , für die das Bündel $\mathcal{G}_{n,m}^K$, $K \in K_{r,m}$, trivial ist , erhält man durch eine Analyse des Teilbündels $\text{Hom}(U_{r,n}^\perp , E_{r,n})$. Wir beschränken uns auf den reellen Fall $k = \mathbb{R}$.

Ein reelles Vektorraumbündel F über einem endlichen CW - Komplex X heißt stabil trivial vom Typ $(1,n)$, wenn es ein triviales Geradenbündel ξ auf X gibt mit $F \oplus 1\xi \cong n\xi$. Der folgende Satz geht nach Allard [3] im wesentlichen auf T.Y. Lam zurück:

Theorem([3])

Sei F vom Typ $(1,n)$. Dann ist die p - fache Whitney Summe $pF = F \oplus \dots \oplus F$ von F topologisch trivial für $p \geq 1 + 1/(n-1)$. 

Für $1 \leq r \leq n-1$ bezeichne $V_{r,n}^*(\mathbb{R})$ die kompakte Stiefel Mannigfaltigkeit aller orthonormalen r - Beine des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$.

$V_{r,n}^*(\mathbb{R})$ ist ein endlicher CW - Komplex [36] und ein Deformationsretrakt von $V_{r,n}(\mathbb{R})$. Jedes Vektorraumbündel F über $V_{r,n}(\mathbb{R})$ induziert durch Einschränkung ein Vektorraumbündel F^* über $V_{r,n}^*(\mathbb{R})$ und F^* ist trivial über $V_{r,n}^*(\mathbb{R})$ genau dann, wenn F selbst trivial ist; [36], Ch.4 .

$U_{r,n}^\perp$ ist ein (r,n) - Bündel auf $V_{r,n}^*(\mathbb{R})$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(U_{r,n}^\perp , V_{r,n}^*(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n) &\cong n \text{Hom}(U_{r,n}^\perp , V_{r,n}^*(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}) \\ &\cong n U_{r,n}^\perp . \end{aligned}$$

Aus diesen Bemerkungen und dem Satz von Lam folgt daher:

Lemma 8 Sei $K \in K_{r,m}$ Kombination, $1 \leq r \leq n-1$.

$S_{n,m}^K$ ist topologisch trivial für $n \gg r + r/(n-r)$, d.h. für $(n-r)^2 \gg r$. (11)

Eine direkte Inspektion der Ungleichung $(n-r)^2 \gg r$ liefert für $n \leq 7$ die Lösungspaare (r,n) :

(1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (1,5), (2,5), (3,5), (1,6),
(2,6), (3,6), (4,6), (1,7), (2,7), (3,7), (4,7).

Sei nun $K \in K_{r,m}$ eine Kombination, $n_1 = \text{card}\{(i,j) \mid i \in K_j, (i,j) \in (K_1,1)\}$ und
$$N(K) := n(n-r) + n_1 + \dots + n_m.$$

Durch Kombination der Lemmata 5 - 8 erhalten wir

Theorem 3

Für $r = n$, $r = n-1$ oder $(n-r)^2 \gg r$ ist das affine Bündel $S_{n,m}^K(\mathbb{R})$ topologisch trivial über $V_{r,n}(\mathbb{R})$ und daher $S_{n,m}^K(\mathbb{R})$ homöomorph zu $V_{r,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{N(K)}$. Insbesondere ist für alle $1 \leq r \leq n$ und $n \leq 6$ $S_{n,m}^K(\mathbb{R})$ homöomorph zu $V_{r,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{N(K)}$. (12)

2.3 Algebraische Geometrie der Strukturschichten

Sei $1 \leq r \leq n$, $K \in K_{r,m}$ Kombination und $\leq$ schöne Ordnung auf $\underline{n} \times \overline{m}$.

Theorem 1

$S_{n,m}^K(k)$ ist quasi-affin in $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$.

Beweis

Für $1 \leq l \leq m$ sei

$$I_1 := \{(i,j) \in \underline{n} \times \overline{m} \mid i \in K_j, (i,j) \in (K_1,1)\},$$

$$\hat{I}_1 := I_1 \cup \{(K_1,1)\},$$

$$n_1 := \text{card } I_1 \quad \text{und} \quad \hat{n}_1 := \text{card } \hat{I}_1 = n_1 + 1.$$

Sei $(A,B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m}$. Wir ordnen die Spalten $A^i b_j$ der Erreichbarkeitsmatrix $R(A,B) = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ gemäß

$$A^i b_j \text{ steht links von } A^k b_l \iff (i,j) \leq (k,l)$$

an und erhalten dadurch die permutierte Erreichbarkeitsmatrix $R^{\leq}(A,B)$.

Seien $R_1^{\leq}(A,B)$, $\hat{R}_1^{\leq}(A,B)$ Teilmatrizen von $R^{\leq}(A,B)$, gegeben durch:

$$R_1^{\leq}(A,B) := (A^i b_j)_{(i,j) \in I_1}, \quad \hat{R}_1^{\leq}(A,B) := (A^i b_j)_{(i,j) \in \hat{I}_1}.$$

Sei D_1 bzw. $\hat{D}_1$ die Menge aller $n_1 \times n_1$ bzw. $\hat{n}_1 \times \hat{n}_1$ - Minoren von $R_1^{\leq}(A,B)$ bzw. $\hat{R}_1^{\leq}(A,B)$.

Dann gibt es also endlich viele Polynome $p_{il} \in \hat{D}_1$, $1 \leq i \leq \lambda_1$ und $q_{jl} \in D_1$, $1 \leq j \leq \mu_1$ in den Koeffizienten der Matrizen (A,B) mit:

$(A,B) \in S_{n,m}^K(k)$ dann und nur dann, wenn gilt:

(1) Für alle $1 \leq l \leq m$, $1 \leq i \leq \lambda_1$ ist $p_{il}(A,B) = 0$

(2) Zu jedem $1 \leq l \leq m$ gibt es $1 \leq j \leq \mu_1$ mit $q_{jl}(A,B) \neq 0$.

Setze

$$X := \bigcap_{l=1}^m \bigcap_{i=1}^{\lambda_1} \{ (A,B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \mid p_{il}(A,B) = 0 \}$$

$$U := \bigcap_{l=1}^m \bigcup_{j=1}^{\mu_1} \{ (A,B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \mid q_{jl}(A,B) \neq 0 \}.$$

Dann ist X affin algebraisch und U Zariski - offen (siehe 1.1), also ist $S_{n,m}^K(k) = X \cap U$ quasi - affin.



In Abschnitt 1.1 haben wir definiert, wann wir eine quasi - affine Varietät irreduzibel nennen. Nach Satz 1.1.2 folgt aus Theorem 2.2.1 und Theorem 2.2.2

Theorem 2 Sei $K \in K_{r,m}$ Kombination .

- a) Für $1 \leq r \leq n-1$ ist $S_{n,m}^K(\mathbb{R})$ irreduzibel .
 b) $S_{n,m}^K(\mathbb{C})$ ist für alle $1 \leq r \leq n$ irreduzibel.



Nach Satz 1.1.3 folgt aus Theorem 1 für alle $1 \leq r \leq n$ und alle Kombinationen $K \in K_{r,m}$:

Theorem 3

Der topologische Abschluß $\overline{S_{n,m}^K(\mathbb{C})}$ von $S_{n,m}^K(\mathbb{C})$ in $\mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times m}$ ist eine analytische Teilvarietät von $\mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times m}$ und $\overline{S_{n,m}^K(\mathbb{R})}$ ist eine semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$.



2.4 Hermite Schichten und ihre Kombinatorik

In diesem Abschnitt befassen wir uns eingehender mit den Hermite Schichten $\text{Her}_K(k)$ des $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$.

Zur Erinnerung: Zu jedem Paar $(A,B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ sind die Hermite Indizes $K = (K_1, \dots, K_m)$ durch das Streichverfahren

$$b_1 \rightarrow Ab_1 \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1}b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow \dots \rightarrow b_m \rightarrow Ab_m \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1}b_m$$

definiert; vgl. 2.1 . Ist $(A,B) \in S_{n,m}^r(k)$, so ist $(K_1, \dots, K_m)$ eine Kombination von r :

$$|K| = K_1 + \dots + K_m = r .$$

Theorem 1 Sei $K \in K_{r,m}$ eine Kombination von r und $0 \leq r \leq n$.

1) $\text{Her}_K(k)$ ist eine quasi - affine Untermannigfaltigkeit von $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ und ist für $r < n$ zusammenhängend.

2) Die Dimension von $\text{Her}_K(k)$ ist gegeben durch

$$\dim_k \text{Her}_K(k) = \sum_{i=1}^m (m - i + 1)K_i + n^2 .$$

3) Der topologische Abschluß $\overline{\text{Her}_K(\mathbb{C})}$ von $\text{Her}_K(\mathbb{C})$ in $\mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times m}$ ist eine analytische Teilvarietät von $\mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times m}$.

4) Für $|K| = n$ ist der relative topologische Abschluß von $\text{Her}_K(\mathbb{C})$ in $\tilde{\sum}_{n,m}(\mathbb{C})$ eine analytische Teilvarietät von $\tilde{\sum}_{n,m}(\mathbb{C})$.

5) $\overline{\text{Her}_K(\mathbb{R})}$ ist eine semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$.

Beweis

1), 3), 4), 5) folgen unmittelbar aus den Theoremen 2.2.1, 2.2.2, 2.3.1, 2.3.3 ; vgl. auch Abschnitt 1.1.1 , 1.1.3 .

Sei $\leq$ die Hermite Ordnung auf $\underline{n} \times \overline{m}$ (Definition 2.1.2) und

$$n_1 = \text{card} \{ (i,j) \in \underline{n} \times \overline{m} \mid i < K_j \text{ und } (i,j) < (K_1, 1) \} .$$

Nach Theorem 2.2.1 gilt

$$\dim_K \text{Her}_K(k) = n^2 + n_1 + \dots + n_m .$$

Aus der Definition der Hermite Ordnung ergibt sich sofort die Beziehung

$$n_1 = K_1 + \dots + K_1$$

und daraus folgt wiederum

$$\begin{aligned} \dim_K \text{Her}_K(k) &= n^2 + K_1 + (K_1 + K_2) + \dots + (K_1 + \dots + K_m) \\ &= n^2 + \sum_{i=1}^m (m - i + 1) K_i . \end{aligned}$$



Theorem 1 läßt die Frage offen, ob auch der relative topologische Abschluß der reellen Hermite Schichten $\text{Her}_K(\mathbb{R})$ von $\tilde{\sum}_{n,m}(\mathbb{R})$ eine analytische Teilvarietät von $\tilde{\sum}_{n,m}(\mathbb{R})$ ist. Wir zeigen jetzt durch ein Beispiel, daß dies in der Regel nicht der Fall ist .

Beispiel: $n = m = 2$

Die möglichen Kombinationen (K_1, K_2) von 0, 1, 2 sind offenbar

$$(0,0) , (0,1) , (1,0) , (1,1) , (0,2) , (2,0) .$$

Es ist

$$H_{00} = \{ (A,B) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid B = 0 \} = \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \{ 0 \}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2}$, also unproblematisch.

Interessanter ist schon

$$H_{01} = \{ (A, B) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid b_1 = 0, b_2 \neq 0, \det(b_2, Ab_2) = 0 \} .$$

Sei $\text{Spec}(A) := \text{Spektrum von } A$. Da

$$\text{Spec}(A) \text{ reell} \Leftrightarrow (\text{Tr}A)^2 - 4\det A \geq 0 ,$$

ist die Menge

$$X := \{ (A, B) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid b_1 = 0, \det(b_2, Ab_2) = 0, \text{Spec}(A) \text{ reell} \}$$

zwar semialgebraisch, aber keine algebraische oder analytische Teilvarietät von $\mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2}$ (betrachte den Schnitt von X mit $B = 0$).

Es ist $\overline{H_{01}} = X$:

a) $H_{01} \subset X$ ist klar.

b) Sei $(A, B) \in X$. Ist $b_2 \neq 0$, so $(A, B) \in H_{01} \subset \overline{H_{01}}$.

Angenommen, $b_2 = 0$. Sei $b \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ ein Eigenvektor von A . Mit $B_\varepsilon := (0, \varepsilon b)$ ist für alle $|\varepsilon| \neq 0$, $|\varepsilon|$ genügend klein, das Paar $(A, B_\varepsilon) \in H_{01}$ eine Approximation von $(A, B) = (A, 0)$. Also $(A, B) \in \overline{H_{01}}$. ✓

Bemerkung 1

Sei $H_{10} = \{ (A, B) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid b_1 \neq 0, \det B = 0, \det(b_1, Ab_1) = 0 \}$

und X die semialgebraische (aber nicht analytische) Teilvarietät

$$\{ (A, B) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det B = 0, \det(b_i, Ab_i) = 0, i=1, 2, \text{Spec}(A) \text{ reell} \} .$$

Dann ist X gleich dem topologischen Abschluß von H_{10} in $\mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Beweis

a) $H_{10} \subset X$ ist klar.

b) Sei $(A, B) \in X$ und o.B.d.A. $b_1 = 0$.

(i) Sei $b_2 = 0$. Wähle einen reellen Eigenvektor $b \neq 0$ von A und setze für $\varepsilon \in \mathbb{R}$: $B_\varepsilon := (\varepsilon b, \varepsilon b)$.

Dann ist für $|\varepsilon| \neq 0$ genügend klein das System $(A, B_\varepsilon) \in H_{10}$ eine Approximation von (A, B) .

(ii) Sei $b_2 \neq 0$. Für $\varepsilon \neq 0$ setzen wir $B_\varepsilon := (\varepsilon b_2, b_2)$. Dann ist $(A, B_\varepsilon) \in H_{10}$ die gesuchte Approximation. ✓

Bemerkung 2

Sei $H_{11} = \{(A, B) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det B \neq 0, \det(b_1, Ab_1) = 0\}$

und X die semialgebraische aber nicht analytische Varietät

$$\{(A, B) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \text{Spec}(A) \text{ reell}, \det(b_1, Ab_1) = 0\}.$$

Dann gilt $\overline{H_{11}} = X$.

Beweis

$H_{11} \subset X$ ist klar.

Sei also $(A, B) \in X$.

1) $b_1 \neq 0$. Wähle $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\det(v, b_1) \neq 0$. Dann ist für $|\xi| \neq 0$ genügend nahe bei 0 die Matrix

$$B_\xi := (b_1, b_2 + \xi v)$$

invertierbar und es gilt $(A, B_\xi) \in H_{11}$.

2) $b_1 = 0, b_2 \neq 0$. Sei $v \neq 0$ ein Eigenvektor von A .

Ist $\det(v, b_2) \neq 0$ so setzen wir für alle $|\xi| \neq 0$ genügend klein

$$B_\xi := (\xi v, b_2),$$

während wir für $\det(v, b_2) = 0$

$$B_\xi := (\xi v, b_2 + \xi w)$$

setzen und $w \in \mathbb{R}^2$ ist irgendein Vektor mit $\det(v, w) \neq 0$.

In beiden Fällen ist - für hinreichend kleines $|\xi| \neq 0$ - die Matrix B_ξ invertierbar. Wegen $(A, B_\xi) \in H_{11}$ ist damit auch Fall 2) erledigt.

3) $b_1 = b_2 = 0$

Sei $v \neq 0$ mit $\det(v, Av) = 0$ und $w \neq 0$ mit $\det(v, w) \neq 0$. Setze

$$B_\xi := (\xi v, \xi w)$$

für $\xi \neq 0$. Dann ist $(A, B_\xi) \in H_{11}$. ✓

Bemerkung 3

Sei $H_{02} = \{(A, B) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid b_1 = 0, b_2 \neq 0, \det(b_2, Ab_2) \neq 0\}$.

Dann ist $\overline{H_{02}}$ gleich der algebraischen Varietät

$$X = \{(A, B) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid b_1 = 0\}.$$

Beweis

$H_{02} \subset X$ ist klar.

Sei also $(A, B) \in X$.

1) $b_2 \neq 0$; $\det(b_2, Ab_2) = 0$: Zu jedem $\varepsilon \neq 0$ gibt es eine Matrix

A_ε mit den Eigenschaften

a) $\text{Spec}(A_\varepsilon) = \{s_1, s_2\}$ und $s_1 \neq s_2$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^2$.

b) b_2 ist kein Eigenvektor von A_ε

c) $\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$ für $|\varepsilon|$ klein .

Dann ist $(A_\varepsilon, B) \in H_{02}$ die gesuchte Approximation von (A, B) .

2) $b_2 = 0$: Für $\varepsilon \neq 0$ sei A_ε eine 2×2 - Matrix mit

a) $\text{Spec}(A_\varepsilon) \neq \{s\}$ für alle $s \in \mathbb{R}^2$

b) $\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$ für $|\varepsilon|$ genügend klein.

So eine Matrix gibt es offenbar . Wähle einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$, der kein Eigenvektor von A_ε ist ; dies ist nach a) möglich .

Wir setzen $B_\varepsilon := (0, \varepsilon v)$. Dann ist $(A_\varepsilon, B_\varepsilon) \in H_{02}$ und wir haben eine Approximation von (A, B) in H_{02} gefunden. ✓

Da offenbar $H_{20} = \{(A, B) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det(b_1, Ab_1) \neq 0\}$ offen und dicht in $\mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist , haben wir den folgenden Satz gezeigt:

Lemma 1 Sei $n = m = 2$, $0 \leq r \leq 2$ und $K \in K_{r, 2}$ Kombination von r .

Die abgeschlossene Hülle $\overline{\text{Her}_K(\mathbb{R})}$ von $\text{Her}_K(\mathbb{R})$ ist genau dann eine analytische Teilvarietät von $\mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2}$, wenn $K \in \{(0, 0), (0, 2), (2, 0)\}$.

Eine vernünftige Halbordnung auf der Menge aller Hermite Schichten ist die Adhärenz Ordnung

$$K \ll L : \iff \text{Her}_K(k) \subset \overline{\text{Her}_L(k)}$$

für Kombinationen $K \in K_{r, m}$, $L \in K_{s, m}$, $0 \leq r \leq s \leq n$.

Statt der Adhärenz Ordnung kann man auch noch die Berührungsordnung auf der Menge der Hermite Schichten resp. der Kombinationen ein-

führen, sie ist definiert durch:

$$K \subseteq L : \Longleftrightarrow \text{Her}_K(k) \cap \overline{\text{Her}_L(k)} \neq \emptyset .$$

Zwar gilt stets die Implikation

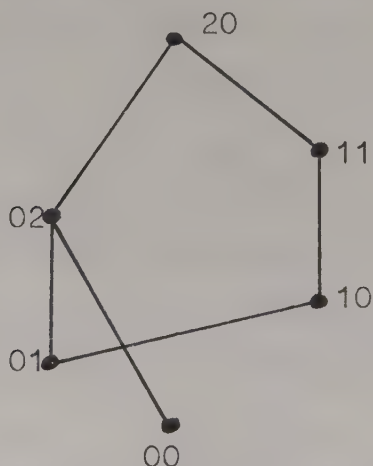
$$K \leq L \Rightarrow K \subseteq L ,$$

doch im allgemeinen sind diese beiden Halbordnungen verschieden voneinander.

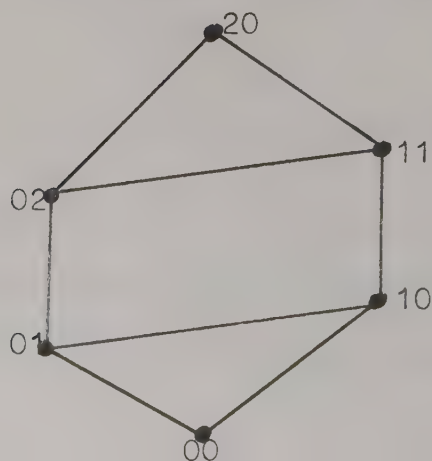
Im Fall des obigen Beispiels $n = m = 2$ und $k = \mathbb{R}$ läßt sich dieser Unterschied zwischen den Ordnungen gut erkennen. In der Tat ist die Adhärenz Ordnung durch die explizite Beschreibung der Abschlüsse $\overline{\text{Her}_K(\mathbb{R})}$ leicht charakterisierbar. Man findet die Beziehungen

$$\begin{aligned} (0,0) &\leq (0,2) \leq (2,0) , & (0,1) &\leq (0,2) , & (0,1) &\leq (1,0) , \\ (1,0) &\leq (1,1) \leq (2,0) . \end{aligned}$$

Das Hasse Diagramm der Adhärenz Ordnung ist also hier von der Form



Das Hasse Diagramm der Berührungsordnung hat dagegen die Gestalt



Wir sehen daran, daß die Hermite Schichten mit der Adhärenz Ordnung zwar ein größtes Element - die generische Schicht $\text{Her}_{(2,0)}(\mathbb{R})$ - besitzt, aber kein kleinstes Element. Bezüglich der Berührungsordnung existieren hingegen sowohl ein größtes als auch ein kleinstes Element. Hier bilden die freien Systeme $(A,0)$ gerade die kleinste Hermite Schicht.

Im folgenden werden wir allgemein die Kombinatorik der Hermite Schichten bezüglich der Adhärenz Ordnung und der Berührungsordnung untersuchen. Wir beginnen mit etwas kombinatorischer Terminologie.

2.4.1 Exkurs zur Kombinatorik

Als Quellen nennen wir das Buch von Aigner [2] und den Aufsatz von Hiller [34].

Sei $(P, \leq)$ eine halbgeordnete Menge mit endlich vielen Elementen.

Definition

Für $p, q \in P$ heißt q ein cover von p (Bezeichnung: $p \rightarrow q$), falls $p < q$ und aus $p < x \leq q$ stets $x = q$ folgt. Es liegt also kein Element zwischen p und q und wir sagen, daß q unmittelbar über p liegt.

Eine Kette der Länge $n-1$ ist eine Folge

$$p = p_1 < \dots < p_n = q$$

in P . Eine Kette heißt maximal, wenn sie nur aus covers besteht, d.h. wenn für alle $1 \leq i \leq n-1$ p_{i+1} ein cover von p_i ist.

Maximale Ketten heißen Wege.

Ein Element $0 \in P$ heißt kleinstes Element, wenn für alle $p \in P$ gilt

$$0 \leq p.$$

$1 \in P$ heißt größtes Element, wenn für alle $p \in P$ $p \leq 1$ ist.

Sei P eine halbgeordnete Menge mit kleinstem Element 0 und größtem Element 1 . Das Zeta Polynom von P ist definiert als

$$Z(P, n) := \text{card} \left\{ \text{Ketten zwischen } 0 \text{ und } 1 \text{ der Länge } n \right\};$$

$$K(P, n) := \text{card} \left\{ \text{Wege zwischen } 0 \text{ und } 1 \text{ der Länge } n \right\}$$

heißt das Kappa Polynom von P ; .

Definition Sei $(P, \leq)$ halbgeordnete Menge mit 0 .

Eine Rangfunktion für P ist eine Abbildung $r: P \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

a) $r(0) = 0$

b) $p \rightarrow q \implies r(q) = r(p) + 1$.

Rangfunktionen für beliebige halbgeordnete Mengen existieren im allgemeinen nicht; eine Rangfunktion existiert genau dann für P, wenn die Jordan - Dedekindsche Kettenbedingung erfüllt ist ([2]):

[Zwischen zwei beliebigen Elementen $p, q \in P$ haben die maximalen Ketten stets dieselbe Länge (nämlich $r(q) - r(p)$).]

Ist $r(x) = i$, so sagen wir, daß x Rang i hat ; hat P ein 1 Element, so heißt $n := r(1)$ der Rang von P. Insgesamt heißt so eine halbgeordnete Menge P graduiert mit Rang n .

Sei P eine endliche halbgeordnete Menge , graduiert mit Rang n .

Wir setzen für jedes $0 \leq i \leq n$:

$$P_i := \{ x \in P \mid r(x) = i \} ,$$

$$p_i := \text{card } P_i .$$

Das Polynom $F(P, t) := p_0 + p_1 t + \dots + p_n t^n$ heißt die erzeugende Funktion oder Poincaré Polynom von P . Wir sagen, daß P Rang symmetrisch ist , wenn für alle $0 \leq i \leq n$

$$p_i = p_{n-i}$$

und P heißt unimodal , wenn es ein $0 \leq i \leq n$ gibt mit

$$p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_i \geq p_{i+1} \geq \dots \geq p_n .$$

Ein wichtiger Verband ist der Young Verband

$$Y_{k,n} := \{ (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid 0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k \leq n \}$$

versehen mit der Produktordnung

$$(a_1, \dots, a_k) \leq (b_1, \dots, b_k) : \iff a_i \leq b_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq k .$$

$Y_{k,n}$ ist in der Tat ein Verband mit den Verbandsoperationen

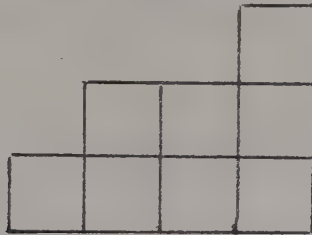
$$a \wedge b := (\min(a_i, b_i))_{i=1, \dots, k} \quad \text{und}$$

$$a \vee b := (\max(a_i, b_i))_{i=1, \dots, k} .$$

Nach Aigner [2], p.40, ist die Rangfunktion von $Y_{k,n}$ gerade

$$r: Y_{k,n} \longrightarrow \mathbb{N}_0, \quad r(a) = a_1 + \dots + a_k .$$

Man kann sich $a \in Y_{k,n}$ als eine Partition von $r(a)$ vorstellen und daher auch durch ein Ferrer Diagramm veranschaulichen; so hat z.B. die Partition $(1,2,2,3) \in Y_{4,3}$ das Ferrer Diagramm



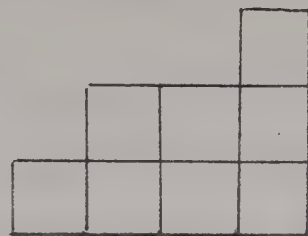
Die Beziehung $a \leq b$ in $Y_{k,n}$ ist dann äquivalent dazu, daß das Ferrer Diagramm von a im Ferrer Diagramm von b enthalten ist. Am Ferrer Diagramm liest man ohne Schwierigkeit ab:

Lemma 2 Sei $a, b \in Y_{k,n}$, $a \leq b$.

b ist ein cover von a in $Y_{k,n}$ dann und nur dann, wenn es genau ein i gibt mit $b_i = a_i + 1$, $b_j = a_j$ für $j \neq i$.



ist cover von



Die erzeugende Funktion des Young Verbandes $Y_{k,n}$ ist das Gauß Polynom; nämlich

$$F(Y_{k,n}, t) = \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} (t) := \frac{(1-t^{n+1}) \cdots (1-t^{n+k})}{(1-t) \cdots (1-t^k)} .$$

Nach Aigner [2], Proposition 3.13, 3.27 ist $Y_{k,n}$ unimodal und Rang symmetrisch. Es scheint ein sehr schweres zahlentheoretisches

Problem zu sein, explizite Formeln für die Zahlen $p_i = p_i(Y_{k,n})$ in den Variablen i, k, n anzugeben. In der Tat ist die Berechnung dieser Zahlen p_i ein sehr altes ungelöstes Problem der Zahlentheorie, denn p_i ist ja gerade die Anzahl aller Partitionen

$$a_1 + \dots + a_k = i$$

mit $a_j \leq n$. Zum Teil sind diese Zahlen tabelliert; siehe [4].

Lemma 3

$Y_{k,n}$ ist ein graduierter Verband mit Rang kn . $Y_{k,n}$ ist unimodal und Rang symmetrisch. Ein kleinstes und ein größtes Element existieren: $0 = (0, \dots, 0)$, $1 = (n, \dots, n)$. 

2.4.2 Dominanz Ordnung der Kombinationen

Wir versehen die Menge aller Kombinationen von n

$$K_{n,m} := \{ (K_1, \dots, K_m) \in \mathbb{N}_0^m \mid K_1 + \dots + K_m = n \}$$

mit der Halbordnung $(K, L \in K_{n,m})$:

$$K \leq L : \iff K_1 + \dots + K_j \leq L_1 + \dots + L_j \text{ für alle } j \in \bar{m}$$

und nennen diese Ordnung die Dominanz Ordnung auf $K_{n,m}$.

Die Abbildung zwischen halbgeordneten Mengen

$$f: K_{n,m} \longrightarrow Y_{m-1,n}$$

$$(K_1, \dots, K_m) \longmapsto (K_1, K_1 + K_2, \dots, K_1 + \dots + K_{m-1})$$

ist offenbar ein Ordnungsisomorphismus von $K_{n,m}$ auf den Young Verband $Y_{m-1,n}$. Also ist die Ordnungsstruktur auf $K_{n,m}$ mit der Dominanz Ordnung dieselbe wie die von $Y_{m-1,n}$; insbesondere hat $(K_{n,m}, \leq)$ ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element

$$\underline{0} := (0, \dots, 0, n)$$

und ein eindeutig bestimmtes größtes Element

$$\underline{1} := (n, 0, \dots, 0)$$

Die in Abschnitt 2.4.1 erwähnten Eigenschaften des Young Verbandes lassen sich alle auf den Raum der Kombinationen $K_{n,m}$ übertragen.

Lemma 4

Die Rangfunktion von $K_{n,m}$ ist

$$\rho: K_{n,m} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad \rho(K) := \sum_{i=1}^m (m-i)K_i.$$

Beweis

Die Rangfunktion von $Y_{m-1,n}$ ist gegeben durch $r(a) = a_1 + \dots + a_{m-1}$, also ist durch

$$\rho(K) := r(f(K)) = \sum_{i=1}^m (m-i)K_i$$

die Rangfunktion von $K_{n,m}$ gegeben. 

In Hinblick auf Theorem 2.4.1 gilt daher

$$\begin{aligned} &\text{Rang } \rho(K) \text{ der Kombination } K \in K_{n,m} \\ &= (\text{Dimension der Hermite Schicht } \text{Her}_K(k)) - (n^2 + n). \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.4.2 folgt unmittelbar

Lemma 5 Sei $K, L \in K_{n,m}$.

L ist cover von K dann und nur dann, wenn es ein $1 \leq i \leq m-1$ mit $K_{i+1} \neq 0$ gibt und $L = (K_1, \dots, K_{i-1}, K_i+1, K_{i+1}-1, K_{i+2}, \dots, K_m)$. 

Der Ordnungsisomorphismus $f: K_{n,m} \rightarrow Y_{m-1,n}$ transportiert die Verbandsstruktur von $Y_{m-1,n}$ auf $K_{n,m}$:

Lemma 6

$K_{n,m}$ ist ein Verband durch

$$K \wedge L := J \text{ und } J_1 = \min\left(\sum_{i=1}^1 K_i, \sum_{i=1}^1 L_i\right) - \sum_{i=1}^{1-1} J_i, \quad 1 \in \bar{m},$$

$$K \vee L := S \text{ mit } S_1 = \max\left(\sum_{i=1}^1 K_i, \sum_{i=1}^1 L_i\right) - \sum_{i=1}^{1-1} S_i, \quad 1 \in \bar{m}.$$



Lemma 7

$K_{n,m}$ ist ein unimodaler und Rang symmetrischer Verband mit Rang $n(m-1)$.



Die Rang Symmetrie von $K_{n,m}$ ist auch leicht direkt zu zeigen.

Dazu definieren wir:

Definition

Die duale Kombination $K^* \in K_{n,m}$ von $(K_1, \dots, K_m) \in K_{n,m}$ ist definiert als

$$K^* := (K_m, K_{m-1}, \dots, K_1) .$$

Dann gibt $K \mapsto K^*$ einen Verbands Anti-Isomorphismus mit

$$\rho(K^*) = n(m-1) - \rho(K) .$$

Dies zeigt die Rang Symmetrie von $K_{n,m}$.



2.4.3 Anordnung der Hermite Schichten

Wir analysieren die kombinatorische Struktur der komplexen Hermite Schichten erreichbarer Systeme. Sei $\leq$ die Dominanz Ordnung auf $K_{n,m}$.

Theorem 2 Für Kombinationen $K, L \in K_{n,m}$ gilt:

$$\text{Her}_K(\mathbb{C}) \subset \overline{\text{Her}_L(\mathbb{C})} \Leftrightarrow \text{Her}_K(\mathbb{C}) \cap \overline{\text{Her}_L(\mathbb{C})} \neq \emptyset \Leftrightarrow K \leq L .$$

Beweis [31]

Da $\text{Her}_K(\mathbb{C})$ nicht leer ist, ist die Implikation

$$" \text{Her}_K(\mathbb{C}) \subset \overline{\text{Her}_L(\mathbb{C})} \Rightarrow \text{Her}_K(\mathbb{C}) \cap \overline{\text{Her}_L(\mathbb{C})} \neq \emptyset "$$

klar.

$$\underline{" \operatorname{Her}_K(\mathbb{C}) \cap \overline{\operatorname{Her}_L(\mathbb{C})} \neq \emptyset \Rightarrow K \leq L " :}$$

Sei $(A, B) \in \operatorname{Her}_K(\mathbb{C}) \cap \overline{\operatorname{Her}_L(\mathbb{C})}$ und b_l die l -te Spalte der Matrix B .
Dann ist für jedes $1 \leq l \leq m$:

$$\operatorname{rg}(b_1, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, b_l, \dots, A^{n-1}b_l) = K_1 + \dots + K_l .$$

Da die Rangfunktion nach oben halbstetig ist , gilt für jedes
genügend nahe an (A, B) gelegene $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \operatorname{Her}_L(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_l, \dots, \tilde{A}^{n-1}\tilde{b}_l) &= L_1 + \dots + L_l \\ &\geq K_1 + \dots + K_l . \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

$$\underline{" K \leq L \Rightarrow \operatorname{Her}_K(\mathbb{C}) \subset \overline{\operatorname{Her}_L(\mathbb{C})} " :}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen , daß L
ein cover von K ist , d.h. nach Lemma 2.4.5 :

$$L = (K_1, \dots, K_{i+1}, K_{i+1}^{-1}, \dots, K_m) .$$

Wähle $(A, B) \in \operatorname{Her}_K(\mathbb{C})$.

Für jedes $1 \leq l \leq m$ mit $K_l \geq 1$ sei X_l der $\mathbb{C}$ - Vektorraum , der von
 $b_1, \dots, A^{K_l-1}b_l$ erzeugt wird. Also ist $X_1 \oplus \dots \oplus X_l$ ein A -invarianter
Unterraum von $\mathbb{C}^n$. Sei $p: X_1 \oplus \dots \oplus X_l \rightarrow X_l$ die kanonische
Projektionsabbildung und

$$\overline{A} := p \circ A \Big|_{X_l} : X_l \rightarrow X_l .$$

Da der Körper $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, existiert ein
Eigenvektor $\overline{x} \in X_l$, $\|\overline{x}\| = 1$, von $\overline{A}$. Mit anderen Worten:

$$X_1 \oplus \dots \oplus X_{l-1} \oplus \mathbb{C}\overline{x} \text{ ist } A - \text{invariant} .$$

Da $\overline{A}$ als shift auf $b_1, \dots, A^{K_l-2}b_l$ operiert , ist $\overline{x}$ linear unabhängig
von $b_1, \dots, A^{K_l-2}b_l$.

Für $\varepsilon > 0$ beliebig , $l = i+1$ und $\overline{x} \in X_{i+1}$ wie oben , konstruieren
wir eine Approximation $(\tilde{A}, \tilde{B})$ von $(A, B) \in \operatorname{Her}_K(\mathbb{C})$:

Für $K_i = 0$ setze

$$\tilde{A} := A \text{ und } \tilde{B} := (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m) \text{ mit}$$

$$\tilde{b}_j := b_j \text{ für } j \neq i$$

$$\tilde{b}_i := b_i + \varepsilon \bar{x}.$$

Für $K_i \gg 1$ setze

$$\tilde{B} := B, \quad \tilde{A} := A \text{ auf } X_1 \oplus \dots \oplus X_{i-1} \oplus X_{i+1} \oplus \dots \oplus X_m$$

$$\tilde{A}b_i := Ab_i, \dots, \tilde{A}(A^{K_i-2}b_i) := A^{K_i-1}b_i,$$

$$\tilde{A}(A^{K_i-1}b_i) := A^{K_i}b_i + \varepsilon \bar{x}.$$

In beiden Fällen ist $(\tilde{A}, \tilde{B})$ wohldefiniert und ε -nahe an (A, B) .

Es reicht zu zeigen, daß $(\tilde{A}, \tilde{B})$ die richtigen Hermite Indizes hat, d.h. $K(\tilde{A}, \tilde{B}) = L$.

(1) $K_r(\tilde{A}, \tilde{B}) = K_r = L_r$ ist klar für $r < i$.

(2) Wegen $\bar{x} \notin X_1 \oplus \dots \oplus X_i$ gilt $K_i(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq K_i + 1 = L_i$.

Nach Definition von $\tilde{A}$ ist

$$\tilde{A}(X_i) \subset X_1 \oplus \dots \oplus X_i \oplus \mathbb{C}\bar{x}.$$

Wegen $\tilde{A}(\bar{x}) = A\bar{x}$ also

$$\tilde{A}(\mathbb{C}\bar{x}) \subset X_1 \oplus \dots \oplus X_i \oplus \mathbb{C}\bar{x}.$$

Also ist $X_1 \oplus \dots \oplus X_i \oplus \mathbb{C}\bar{x}$ ein $\tilde{A}$ -invarianter Unterraum und mit (1) folgt

$$K_i(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq K_i + 1.$$

(3) Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\bar{x}$ von $b_{i+1}, \dots, A^{K_{i+1}-2}b_{i+1}$ gilt $K_{i+1}(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq K_{i+1} - 1 = L_{i+1}$ und aus der Invarianz

$$\tilde{A}(X_1 \oplus \dots \oplus X_{i+1}) \subset X_1 \oplus \dots \oplus X_{i+1}$$

folgt $K_{i+1}(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq K_{i+1} - 1$.

Da $\tilde{A} = A$ auf $X_{i+1} \oplus \dots \oplus X_m$, ist $K_r(\tilde{A}, \tilde{B}) = K_r$ für alle $i+1 \leq r \leq m$. Also $K_r(\tilde{A}, \tilde{B}) = L_r$ für alle $1 \leq r \leq m$.



Eine unmittelbare Folgerung aus Theorem 2 ist:

$$\begin{aligned} & \text{Adhärenz Ordnung auf den Hermite Schichten } \text{Her}_K(\mathbb{C}) \subset \widetilde{\sum}_{n,m}(\mathbb{C}) \\ & = \text{Berührungsordnung auf den Hermite Schichten } \text{Her}_K(\mathbb{C}) \subset \widetilde{\sum}_{n,m}(\mathbb{C}) \\ & = \text{Dominanz Ordnung auf den Kombinationen } K \in K_{n,m} . \end{aligned}$$

Theorem 2 ist für reelle Hermite Schichten $\text{Her}_K(\mathbb{R})$ falsch .

In der Tat hatten wir schon zu Anfang des Abschnittes 2.4 durch das Beispiel

$$n = m = 2 , K = (0,2) \leq L = (1,1)$$

gezeigt , daß zwar $\text{Her}_K(\mathbb{R}) \cap \overline{\text{Her}_L(\mathbb{R})} \neq \emptyset$, aber nicht $\text{Her}_K(\mathbb{R}) \subset \overline{\text{Her}_L(\mathbb{R})}$ gelten muß .

Bemerkung

Sei $\leq$ die Dominanz Ordnung auf $K_{r,m}$. Dann gilt für alle $K \in K_{r,m}$

$$K \leq K_1 := (r, 0, \dots, 0) ;$$

$\text{Her}_{K_1}(k)$ ist also die generische Hermite Schicht in $S_{n,m}^r(k)$.

In der Tat ist ja $K \leq K_1$ genau dann , wenn für alle $1 \leq l \leq m$

$K_1 + \dots + K_l \leq r$ ist . Dies ist aber für alle $K \in K_{r,m}$ wahr.

Daraus und aus der Dimensionsformel für $\text{Her}_K(k)$ folgt aber leicht, daß $\text{Her}_{K_1}(k)$ offen und dicht in $S_{n,m}^r(k)$ ist .



2.5 Kronecker Schichten und ihre Kombinatorik

Zur Erinnerung: Die Kronecker Indizes $K = K(A, B) = (K_1, \dots, K_m)$ eines Paares $(A, B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ sind durch das Streichverfahren

$$b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow \dots \rightarrow b_m \rightarrow Ab_1 \rightarrow \dots \rightarrow Ab_m \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1}b_1 \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1}b_m$$

definiert; vgl. 2.1. Ist dabei $K \in K_{r,m}$ eine Kombination von r , so ist die Kronecker Schicht $\text{Kro}_K(k)$ eine nichtleere Teilmenge von $S_{n,m}^r(k)$ und diese Schichten bilden eine (disjunkte) Zerlegung von $S_{n,m}^r(k)$.

Analog zu Theorem 2.4.1 gilt

Theorem 1 Sei $K \in K_{r,m}$ eine Kombination von r mit $0 \leq r \leq n$.

1) $\text{Kro}_K(k)$ ist eine quasi - affine Untermannigfaltigkeit von $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ und ist für $r < n$ zusammenhängend.

2) Die Dimension von $\text{Kro}_K(k)$ ist

$$\dim_k \text{Kro}_K(k) = n^2 + \sum_{i,j=1}^m \min(K_i, K_j) + \sum_{i > j} K_{ij}$$

mit
$$K_{ij} := \begin{cases} 0 & K_i \geq K_j \\ 1 & K_i < K_j \end{cases}.$$

3) Der topologische Abschluß $\overline{\text{Kro}_K(\mathbb{C})}$ von $\text{Kro}_K(\mathbb{C})$ in $\mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times m}$ ist eine analytische Teilvarietät von $\mathbb{C}^{n \times n} \times \mathbb{C}^{n \times m}$.

4) Für $|K| = n$ ist der relative topologische Abschluß von $\text{Kro}_K(\mathbb{C})$ in $\tilde{\sum}_{n,m}(\mathbb{C})$ eine analytische Teilvarietät von $\tilde{\sum}_{n,m}(\mathbb{C})$.

5) Der topologische Abschluß $\overline{\text{Kro}_K(\mathbb{R})}$ von $\text{Kro}_K(\mathbb{R})$ ist eine semi - algebraische Teilmenge von $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$.

Beweis

1), 3), 4), 5) folgen unmittelbar aus den Theoremen 2.2.1, 2.2.2, 2.3.1 und 2.3.3.

Sei $\leq$ die Kronecker Ordnung auf $\underline{n} \times \bar{m}$ (Definition 2.1.1) und

$$n_1 = \text{card} \{ (i,j) \in \underline{n} \times \bar{m} \mid i < K_j \text{ und } (i,j) < (K_1, 1) \}.$$

Nach Theorem 2.2.1 gilt $\dim_K \text{Kro}_K(k) = n^2 + n_1 + \dots + n_m$.

Wir berechnen n_1 :

$$\begin{aligned} n_1 &= \text{card} \{ (i, j) \mid (i < K_j) \wedge [(i < K_1) \vee (i = K_1, j < 1)] \} \\ &= \text{card} \{ (i, j) \mid (i < K_j) \wedge (i < K_1) \} \\ &\quad + \text{card} \{ (i, j) \mid (i < K_j) \wedge (i = K_1, j < 1) \} \\ &= \text{card} \{ (i, j) \mid i < \min(K_j, K_1) \} \\ &\quad + \text{card} \{ (i, j) \mid j < 1, i = K_1, K_1 < K_j \} \\ &= \sum_{j=1}^m \min(K_j, K_1) + \sum_{j=1}^{1-1} K_{1j} \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

In der Literatur (Popov [47]) findet man auch die Dimensionsformel

$$\dim_K \text{Kro}_K(k) = n^2 + \sum_{i \leq j} \min(K_i, K_j) + \sum_{i > j} \min(K_i + 1, K_j) .$$

In der Tat:

$$\begin{aligned} \sum_{i > j} \min(K_i + 1, K_j) &= \sum_{i > j, K_i < K_j} (K_i + 1) + \sum_{i > j, K_i \geq K_j} K_j \\ &= \sum_{i > j} \min(K_i, K_j) + \sum_{i > j} K_{ij} . \end{aligned}$$

Ordnet man die Kronecker Indizes $(K_1, \dots, K_m)$ der Größe nach an, so erhält man eine Folge $\mathcal{K}_1 \geq \mathcal{K}_2 \geq \dots \geq \mathcal{K}_m$ natürlicher Zahlen mit $\mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_m = n$. Diese Zahlen heißen die Kontrollierbarkeitsindizes eines Paares $(A, B) \in \text{Kro}_K(k)$; vgl. den folgenden Abschnitt.

Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{i, j=1}^m \min(K_i, K_j) &= \sum_{i > j} \min(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j) + \sum_{i \leq j} \min(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j) \\ &= \sum_{i \leq j} \mathcal{K}_j + \sum_{i > j} \mathcal{K}_i \\ &= \sum_{i=1}^m (2i - 1) \mathcal{K}_i \end{aligned}$$

erhalten wir die folgende Dimensionsformel für $\text{Kro}_K(k)$:

Bemerkung 1

$$\dim_K \text{Kro}_K(k) = n^2 + (2m + 1)n + \sum_{i > j} K_{ij} - 2 \sum_{i=1}^m (m - i + 1) \mathcal{H}_i \quad \checkmark$$

Der Kuriosität halber notieren wir noch:

Für $n = 1/2 m(m + 1)$ sei $K \in K_{n,m}$ eine Permutation von $(1, \dots, m)$.

Dann ist $i(K) := \sum_{i > j} K_{ij}$ die Anzahl aller Fehlstände der Permutation K und aus der obigen Dimensionsformel folgt:

$$\dim_K \text{Kro}_K(k) = i(K) + n^2 + 1/3 n(2m + 1) .$$

Theorem 1 läßt die Frage offen, ob der relative topologische Abschluß der reellen Kronecker Schichten $\text{Kro}_K(\mathbb{R})$ von $\tilde{\sum}_{n,m}(\mathbb{R})$ eine analytische Teilvarietät von $\tilde{\sum}_{n,m}(\mathbb{R})$ ist. Zur Lösung dieses schwierigen Problems (in Kapitel 3) stellen wir in diesem Abschnitt ein relativ umfangreiches kombinatorisches Instrumentarium bereit.

2.5.1 Kontrollierbarkeitsindizes und Feedback

Sei $(A, B) \in \tilde{\sum}_{n,m}(k)$ ein erreichbares Paar und für $0 \leq i \leq n-1$

$$r_i := \text{rg}(B, \dots, A^i B)$$

$$r_{-1} := 0 .$$

Für $0 \leq i \leq n-1$ ist dann $e_i := r_i - r_{i-1}$ die Anzahl der linear unabhängigen Spalten von $A^i B$ modulo denen von $(B, \dots, A^{i-1} B)$. Wegen

$$- \quad m \geq e_0 \geq \dots \geq e_{n-1}$$

$$- \quad e_0 + \dots + e_{n-1} = r_{n-1} = n$$

ist $e = e(A, B) := (e_0, \dots, e_{n-1})$ eine Partition von n .

Die duale (konjugierte) Partition $e^* := (e_1^*, \dots, e_m^*)$ von e ist definiert durch

$$e_j^* := \text{card} \{ i \in \underline{n} \mid e_i \geq j \} \quad , \quad j \in \bar{m} .$$

Diese Konjugation $e \mapsto e^*$ ist bijektiv mit der Inversen

$$e_i = \text{card} \{ j \in \bar{m} \mid e_j^* \geq i + 1 \} \quad , i \in \underline{n} \quad , [45] .$$

Definition

Die Zahlen $\mathcal{K}_j := \text{card} \{ i \in \underline{n} \mid e_i \geq j \}$, $1 \leq j \leq m$, heißen die Kontrollierbarkeitsindizes von (A,B) . Wir setzen

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(A,B) := (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m) .$$

Bekanntlich (vgl. Münzner/Prätzel-Wolters [45], Wonham [58]) sind die Kontrollierbarkeitsindizes eines erreichbaren Paares $(A,B) \in \tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$ eine Partition von n :

$$(2.5.1) \quad \mathcal{K}_1 \geq \dots \geq \mathcal{K}_m \geq 0$$

$$(2.5.2) \quad \mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_m = n .$$

Sind $(K_1, \dots, K_m)$ die Kronecker Indizes von $(A,B) \in \tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$, so gilt offenbar für alle $i \in \underline{n}$:

$$(2.5.3) \quad e_i = \text{card} \{ j \in \bar{m} \mid K_j \geq i+1 \} .$$

(2.5.4) Ordnet man die Kronecker Indizes $(K_1, \dots, K_m)$ von (A,B) so um, daß eine Folge monoton fallender Zahlen $\mathcal{K}_1 \geq \dots \geq \mathcal{K}_m$ entsteht, so sind $(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$ die Kontrollierbarkeitsindizes von (A,B) , [45].

Sei $\mathcal{K} : \mathcal{K}_1 \geq \dots \geq \mathcal{K}_m$ eine Partition von n und

$$\text{Kon}_{\mathcal{K}}(k) := \{ (A,B) \in \tilde{\Sigma}_{n,m}(k) \mid (A,B) \text{ hat Kontrollierbarkeitsindizes } \mathcal{K} \} .$$

Wir nennen $\text{Kon}_{\mathcal{K}}(k)$ eine Kontrollierbarkeitsschicht von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$.

Die Kontrollierbarkeitsschichten bilden offenbar eine endliche, disjunkte Zerlegung von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$.

Die Feedback Gruppe $\mathcal{F}_{n,m}$ ist die Gruppe aller $(n+m) \times (n+m)$ - Matrizen

$$\begin{bmatrix} S & 0 \\ F & U \end{bmatrix} \in k^{(n+m) \times (n+m)}$$

mit $S \in GL_n(k)$, $F \in k^{m \times n}$, $U \in GL_m(k)$. $\mathcal{F}_{n,m}$ ist also eine linear algebraische Untergruppe von $GL_{n+m}(k)$ und operiert auf $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$

durch die Feedback Aktion

$$\varphi: \mathcal{F}_{n,m} \times \tilde{\Sigma}_{n,m}(k) \longrightarrow \tilde{\Sigma}_{n,m}(k) \\ ((S, F, U), (A, B)) \longmapsto (S(A + BF)S^{-1}, SBU^{-1}) .$$

Dies ist eine (semi-) algebraische Gruppenaktion und daher sind die Orbits selber semi - algebraisch und differenzierbare Untermannigfaltigkeiten von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$; Gibson [21].

Ein zentrales Resultat der Theorie zeitinvarianter linearer Systeme besagt, daß die Kontrollierbarkeitsindizes ein vollständiges Invariantensystem der Feedback Aktion sind:

Theorem 2 (Brunovsky [58])

Die Orbits der Feedback Aktion φ auf $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$ sind genau die Kontrollierbarkeitsschichten $\text{Kon}_{\mathcal{K}}(k)$ von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$. 

Durch Berechnung des Stabilisators von φ (vgl. auch Wang/Davison [55] Münzner/Prätzel-Wolters [45]) hat Brockett [10] die folgende Dimensionsformel gefunden:

$$\dim_k \text{Kon}_{\mathcal{K}}(k) = n^2 + nm + m^2 - \sum_{\mathcal{K}_i \geq \mathcal{K}_j} (\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_j + 1) .$$

Aus Theorem 2 folgt unmittelbar

Korollar 1 Seien $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ Partitionen von n .

$$\text{Kon}_{\mathcal{K}}(k) \subset \overline{\text{Kon}_{\mathcal{K}'}(k)} \iff \text{Kon}_{\mathcal{K}}(k) \cap \overline{\text{Kon}_{\mathcal{K}'}(k)} \neq \emptyset .$$
 

Für Partitionen $\mathcal{K}: \mathcal{K}_1 \geq \dots \geq \mathcal{K}_m$, $\mathcal{K}': \mathcal{K}'_1 \geq \dots \geq \mathcal{K}'_m$ von n setzen wir

$$\mathcal{K} \leq \mathcal{K}' : \iff \sum_{i=1}^l \mathcal{K}_i \leq \sum_{i=1}^l \mathcal{K}'_i \quad \text{für alle } l \in \bar{m} .$$

Dies ist die Dominanz Ordnung auf Partitionen und sie spielt in verschiedenen Gebieten der Mathematik eine wichtige Rolle: Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe S_n , Entartungen von Vektorraumbündeln auf der Riemannschen Zahlenkugel S^2 , Hüllenordnung der Schubert Zellen der Grassmann Mannigfaltigkeit, Eine

umfassende Darstellung findet man im Überblicksartikel von Hazewinkel und Martin [28].

Von Byrnes [12] bzw. Hazewinkel/Martin [28] stammt nun der folgende schöne Satz über den topologischen Abschluß von $\overline{\text{Kon}}_{\mathcal{K}}(k)$ in $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$:

Theorem 3

$$\text{Kon}_{\mathcal{K}}(k) \subset \overline{\text{Kon}}_{\mathcal{K}'}(k) \iff \text{Kon}_{\mathcal{K}}(k) \cap \overline{\text{Kon}}_{\mathcal{K}'}(k) \neq \emptyset \iff \mathcal{K}' \leq \mathcal{K} . \quad \textcircled{///}$$

Ist $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$ die duale Partition zu $e = (e_0, \dots, e_{n-1})$ so ist nach Theorem 3 der topologische Abschluß von $\text{Kon}_{\mathcal{K}}(k)$ gegeben durch

$$\overline{\text{Kon}}_{\mathcal{K}}(k) = \left\{ (A, B) \in \tilde{\Sigma}_{n,m}(k) \mid \text{rg}(B, \dots, A^i B) \leq e_0 + \dots + e_i, i \in \underline{n} \right\} .$$

Da dies natürlich algebraische Bedingungen sind, folgt

Korollar 2 Sei $\mathcal{K}$ eine Partition von n .

Die Kontrollierbarkeitsschichten $\text{Kon}_{\mathcal{K}}(k)$ sind Untermannigfaltigkeiten von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$ der Dimension $n^2 + nm + m^2 - \sum_{\mathcal{K}_i \geq \mathcal{K}_j} (\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_j + 1)$.

Der Abschluß $\overline{\text{Kon}}_{\mathcal{K}}(k)$ in $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$ ist eine algebraische Teilvarietät von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$. \textcircled{///}

Wir schließen mit einer Bezeichnung:

Zu jeder Kombination $K = (K_1, \dots, K_m) \in K_{n,m}$ sei $\text{Kon}(K) := (\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m)$ diejenige Kombination in $K_{n,m}$ mit

$$(a) \quad \{K_1, \dots, K_m\} = \{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m\}$$

$$(b) \quad \mathcal{K}_1 \geq \dots \geq \mathcal{K}_m .$$

Ist K die Liste der Kronecker Indizes von (A, B) , so ist $\text{Kon}(K)$ die Liste der Kontrollierbarkeitsindizes von (A, B) .

2.5.2 Kronecker Indizes und Feedback

Die unipotente Gruppe $U_m(k)$ ist die Untergruppe von $GL_m(k)$, bestehend aus allen $m \times m$ - Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdot & \cdot & u_{2n} \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & u_{m-1m} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

$U_m(k)$ ist auch Untergruppe der Gruppe

$$D_m(k) := \{ U \in GL_m(k) \mid U \text{ ist obere Dreiecksmatrix} \} .$$

Für jedes Paar $(A,B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ sei $K(A,B)$ die Liste der Kronecker Indizes von (A,B) .

Lemma 1

Für $S \in GL_n(k)$, $F \in k^{m \times n}$, $U \in D_m(k)$ gilt:

$$K(S(A + BF)S^{-1}, SBU^{-1}) = K(A,B) .$$

Beweis

Sei $R(A,B) = (B, \dots, A^{n-1}B)$. Wegen $R(SAS^{-1}, SB) = SR(A,B)$ folgt aus der Definition der Kronecker Indizes (per Streichverfahren) die Invarianz $K(S(A+BF)S^{-1}, SBU^{-1}) = K(A+BF, BU^{-1})$. Sei $V := U^{-1} = (v_{ij})$. Dann $v_{ij} = 0$ für $j < i$ und $BV = (b_1, \dots, b_m)V =$

$$= (v_{11}b_1, v_{12}b_1 + v_{22}b_2, \dots, v_{1m}b_1 + \dots + v_{mm}b_m) .$$

Daraus folgt die Invarianz $K(A,BV) = K(A,B)$ für alle Paare (A,B) und alle $V \in D_m(k)$. Also $K(A+BF, BU^{-1}) = K(A+BF, B)$.

Sei $\leq$ die Kronecker Ordnung (2.1.1) auf $\underline{n} \times \bar{m}$ und $K(A+BF, B) \neq K(A,B)$. Dann gibt es bezüglich $\leq$ ein kleinstes $(i,j) \in \underline{n} \times \bar{m}$ mit

$$\text{Span} \{ A^k b_l \mid (k,l) \leq (i,j) \} \neq \text{Span} \{ (A+BF)^k b_l \mid (k,l) \leq (i,j) \} .$$

Wegen $(A+BF)^i b_j \in A^i b_j + \text{Span} \{ A^k b_l \mid (k,l) < (i,j) \}$ und $A^i b_j \in (A+BF)^i b_j + \text{Span} \{ (A+BF)^k b_l \mid (k,l) < (i,j) \}$ erhalten wir daraus aber einen Widerspruch zur Definition von (i,j) . Also $K(A+BF, B) = K(A,B)$.



Die eingeschränkte Feedback Gruppe $F_{n,m}$ ist die Untergruppe der Feedback Gruppe $\mathcal{F}_{n,m}$, bestehend aus allen $(n+m) \times (n+m)$ - Matrizen

$$\begin{bmatrix} S & O \\ F & U \end{bmatrix} \in K^{(n+m) \times (n+m)}$$

mit $S \in GL_n(K)$, $F \in K^{m \times n}$, $U \in U_m(K)$.

$F_{n,m}$ ist eine linear algebraische Gruppe und die eingeschränkte

Feedback Aktion auf $\tilde{\sum}_{n,m}(K)$

$$\begin{aligned} \phi : F_{n,m} \times \tilde{\sum}_{n,m}(K) &\longrightarrow \tilde{\sum}_{n,m}(K) \\ ((S, F, U), (A, B)) &\longmapsto (S(A + BF)S^{-1}, SBU^{-1}) \end{aligned}$$

eine algebraische Gruppenaktion.

Das Ziel dieses Abschnittes ist der folgende Satz:

Theorem 4

Die Orbits der eingeschränkten Feedback Aktion ϕ von $F_{n,m}$ auf $\tilde{\sum}_{n,m}(K)$ sind genau die Kronecker Schichten $Kro_K(K)$ von $\tilde{\sum}_{n,m}(K)$.

Der Beweis von Theorem 4 verläuft analog zum Beweis von Theorem 2, vgl. Wonham [58]; man muß nur eine genaue Buchführung über die notwendigen Koordinatentransformationen im Inputraum K^m durchführen.

ImB bezeichnet im folgenden den Spaltenraum der Matrix $B = (b_1, \dots, b_m)$.

Lemma 2 Sei $K \in K_{n,m}$ Kombination und $(A, B) \in Kro_K(K)$.

Dann existiert $V \in U_m(K)$, so daß für $\tilde{B} := (\beta_1, \dots, \beta_m) = BV$ gilt:

- (1) $A^{K_j} \beta_j \in ImB + \dots + A^{K_j-1}(ImB)$ für alle $j \in \bar{m}$
- (2) $A^{K_j-1} \beta_j \notin ImB + \dots + A^{K_j-2}(ImB)$ für alle $j \in \bar{m}$
- (3) $K(A, \tilde{B}) = K(A, B)$.

Beweis

(A, B) hat Kronecker Indizes $(K_1, \dots, K_m)$ heißt:

Zu jedem $j \in \bar{m}$ gibt es Zahlen $u_{ij} \in K$ und ein $z_j \in ImB + \dots + A^{K_j-1}(ImB)$

mit

$$(a) \quad A^{K_j} b_j = z_j + \sum_{i=1}^{j-1} u_{ij} A^{K_j} b_i$$

$$(b) \quad A^{K_j-1} b_j \notin \text{Im} B + \dots + A^{K_j-2}(\text{Im} B) + A^{K_j-1}(\text{Span}\{b_1, \dots, b_{j-1}\}) .$$

Sei $\beta_j := b_j - (u_{1j}b_1 + \dots + u_{j-1,j}b_{j-1})$ und $V \in U_m(k)$ die $m \times m$ - Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -u_{12} & \dots & -u_{1m} \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Nach Lemma 1 ist $K(A, B) = K(A, BV) = K(A, B)$.

Nach Konstruktion von β_j ist

$$A^{K_j} \beta_j = z_j \in \text{Im} B + \dots + A^{K_j-1}(\text{Im} B) .$$

Dies zeigt (1). Angenommen,

$$w_{j-1} := A^{K_j-1} \beta_j \in \text{Im} B + \dots + A^{K_j-2}(\text{Im} B) .$$

Dann folgt

$$A^{K_j-1} b_j = w_{j-1} + \sum_{i=1}^{j-1} u_{ij} A^{K_j-1} b_i$$

im Widerspruch zu (b). ⊙

Lemma 3 Sei $(A, B) \in \text{Kro}_K(k)$, $K \in K_{n,m}$. Dann gibt es

$V \in U_m(k)$ und $F \in k^{m \times n}$, so daß für $\tilde{B} := BV$, $\tilde{A} := A + BF$ gilt

(1) $(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{A}^{K_1-1} \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m, \dots, \tilde{A}^{K_m-1} \tilde{b}_m)$ ist Basis des k^n und

(2) $\tilde{A}^{K_j} \tilde{b}_j = 0$ für alle $1 \leq j \leq m$.

Beweis

Wegen $K(A+BF, BV) = K(A, B)$ für alle $F \in k^{m \times n}$, $V \in U_m(k)$ ist stets

$(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{A}^{K_1-1} \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m, \dots, \tilde{A}^{K_m-1} \tilde{b}_m)$ eine Basis von k^n .

Wähle $V \in U_m(k)$ wie in Lemma 2 . Dann gilt also für $1 \leq j \leq m$:

(i) $A^{K_j} \tilde{b}_j \in \text{Im} B + \dots + A^{K_j-1}(\text{Im} B)$

$$(ii) \quad A^{K_j-1} \tilde{b}_j \notin \text{Im} B + \dots + A^{K_j-2}(\text{Im} B) .$$

Nach (i) gibt es $\beta_{1j}, \dots, \beta_{K_j j} \in \text{Im} B$ mit

$$(!) \quad A^{K_j} \tilde{b}_j - \sum_{i=0}^{K_j-1} A^i \beta_{K_j-i, j} = 0 \quad \text{oder äquivalent}$$

$$A(A(\dots A((A \tilde{b}_j - \beta_{1j}) - \beta_{2j}) \dots - \beta_{K_j-1, j}) \dots) - \beta_{K_j, j} = 0 .$$

Wir setzen:

$$\begin{aligned} x_{1j} &:= \tilde{b}_j \\ x_{2j} &:= A \tilde{b}_j - \beta_{1j} \\ &\vdots \\ x_{K_j, j} &:= A^{K_j-1} \tilde{b}_j - A^{K_j-2} \beta_{1j} - \dots - \beta_{K_j-1, j} . \end{aligned}$$

Behauptung: $(x_{1j}, \dots, x_{K_j, j})$ sind linear unabhängig.

Angenommen, $\sum_{r=1}^k a_r x_{rj} = 0$, $a_k \neq 0$, für ein $1 \leq k \leq K_j$. Dann ist

$$A^{k-1} \tilde{b}_j \in \text{Im} B + \dots + A^{k-2}(\text{Im} B) , \text{ also}$$

$$A^{K_j-1} \tilde{b}_j = A^{K_j-k} (A^{k-1} \tilde{b}_j) \in A^{K_j-k}(\text{Im} B) + \dots + A^{K_j-2}(\text{Im} B) .$$

Dies steht aber in Widerspruch zu (ii). Q.E.D.

$$\text{Behauptung: } \sum_{j=1}^m \text{Span}\{x_{1j}, \dots, x_{K_j, j}\} = \text{Im} B + \dots + A^{n-1}(\text{Im} B) .$$

Die Inklusionsrichtung " $\subset$ " ist klar .

$$\text{"} \supset \text{"}: \text{ Offenbar ist } \text{Span}\{x_{11}, \dots, x_{1m}\} = \text{Im} B .$$

Nach Konstruktion der x_{2j} gilt dann auch für alle $1 \leq j \leq m$

$$A \tilde{b}_j \in \text{Span}\{x_{11}, \dots, x_{1m}, x_{21}, \dots, x_{2m}\} .$$

So fortfahrend erhält man schließlich für alle $0 \leq i \leq n-1$:

$$A^i(\text{Im} B) \subset \sum_{j=1}^m \text{Span}\{x_{1j}, \dots, x_{K_j, j}\} . \quad \text{Q.E.D.}$$

Also ist $\{x_{ij} \mid 1 \leq i \leq K_j, 1 \leq j \leq m\}$ eine Basis von k^n .

Wir wählen nun Urbilder $u_{ij} \in k^m$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq K_j$, mit

$\tilde{B}u_{ij} = \beta_{ij}$. Durch die Festsetzung

$$Fx_{ij} := -u_{ij} \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq K_j,$$

ist eine lineare Abbildung $F : k^n \rightarrow k^m$ definiert; ist B injektiv, so ist sogar F durch x_{ij} und β_{ij} eindeutig bestimmt.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} (A + \tilde{B}F)x_{ij} &= Ax_{ij} - \tilde{B}u_{ij} = Ax_{ij} - \beta_{ij} \\ &= x_{i+1,j} \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq K_j - 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A + \tilde{B}F)x_{K_j,j} &= Ax_{K_j,j} - \beta_{K_j,j} \\ &\stackrel{(!)}{=} Ax_{K_j,j} - Ax_{K_j,j} = 0, \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

In anderen Worten:

$A + \tilde{B}F$ operiert zyklisch auf $\text{Span}\{x_{1j}, \dots, x_{K_j,j}\}$ vom Index K_j und mit Erzeuger x_{1j} .

Damit haben wir das gesuchte F gefunden. ⊙

Lemma 4 Sei $(A, B) \in \sum_{n,m} \tilde{\Sigma}(k)$ mit Kronecker Indizes $(K_1, \dots, K_m)$. Dann gibt es $S \in GL_n(k)$, $F \in k^{m \times n}$, $U \in U_m(k)$, so daß $\tilde{B} := SBU^{-1}$, $\tilde{A} := S(A + BU^{-1}F)S^{-1}$ die folgende Gestalt haben:

$$\tilde{A} = \text{diag}(N_1, \dots, N_m) \text{ mit}$$

$$N_j = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \in k^{K_j \times K_j} \quad \text{für } 1 \leq j \leq m; K_j \geq 1,$$

$$\tilde{B} = (\beta_1, \dots, \beta_m) \text{ mit}$$

$$\beta_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow K_1 + \dots + K_{j-1} + 1, \quad 1 \leq j \leq m, K_j \geq 1,$$

Ist $K_j = 0$, so ist N_j leer und $\beta_j = 0$.

Beweis

Man setze $S := (x_{11}, \dots, x_{K_1, 1}, \dots, x_{1m}, \dots, x_{K_m, m})$,
 F, U^{-1} wie im Beweis von Lemma 3.



Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht Theorem 4 zu beweisen.

Beweis von Theorem 4

Nach Lemma 1 sind die Orbits von $F_{n,m}$ ganz in den einzelnen Kronecker Schichten $Kro_K(k)$ enthalten. Es reicht also zu zeigen, daß jedes Paar $(A, B) \in Kro_K(k)$ Feedback äquivalent ist zu einem festen Paar $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in Kro_K(k)$ unter der eingeschränkten Feedback Aktion ϕ . Dies haben wir aber gerade mit Lemma 4 bewiesen.



Korollar 3. Für $K, L \in K_{n,m}$ gilt:

$$Kro_K(k) \subset \overline{Kro_L(k)} \iff Kro_K(k) \cap \overline{Kro_L(k)} \neq \emptyset.$$



Aus dem "closed orbit lemma" (Tannenbaum [54]) folgt mit Theorem 4 die Verschärfung von Theorem 1 (4):

Lemma 5

Der relative Abschluß $\overline{Kro_K(\mathbb{C})}$ in $\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{C})$ ist eine algebraische Teilvarietät von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{C})$.



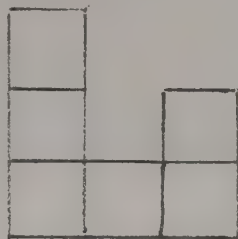
2.5.3 Anordnung der Kronecker Indizes

In diesem Abschnitt wird eine spezielle Halbordnung auf der Menge $K_{n,m}$ aller Kombinationen von n der Länge m definiert und die covers dieser Halbordnung untersucht. H.F. Münzner [46] hat in einem unveröffentlichten Manuskript diese covers charakterisiert und eine entsprechende Rangfunktion von $K_{n,m}$ bestimmt. Ich werde mich im folgenden z.T. eng an die Darstellung [46] halten.

Sei $\leq$ die lexikographische Ordnung auf $\underline{n} \times \bar{m}$. Jeder Kombination $K = (K_1, \dots, K_m) \in K_{n,m}$ ist die Teilmenge $Y_K \subset \underline{n} \times \bar{m}$ zugeordnet :

$$Y_K := \{ (k, l) \in \underline{n} \times \bar{m} \mid 0 \leq k \leq K_l - 1 \} ;$$

graphisch hingegen veranschaulichen wir uns Y_K durch ein Young Diagramm also in $\bar{m} \times \underline{n}$. So ist das Young Diagramm der Kombination (3,1,2) :



Die Elemente $(k, l) \in Y_K$ nennen wir Blöcke von $\underline{n} \times \bar{m}$, die Teilmengen $Y_{K,1} := \{ (k, l) \in \underline{n} \times \bar{m} \mid 0 \leq k \leq K_l - 1 \}$, $1 \leq l \leq m$, heißen Türme von Y_K und die Elemente $(K_l - 1, l) \in Y_K$, $1 \leq l \leq m$, heißen Turmspitzen. Schließlich heißen die Elemente $(i, j) \in \underline{n} \times \bar{m}$, die nicht in Y_K liegen Leerstellen oder freie Positionen von $\underline{n} \times \bar{m}$.

Für jedes $(i, j) \in \underline{n} \times \bar{m}$ sei $r_{ij}(K)$ die Anzahl aller Blöcke $(k, l) \leq (i, j)$

$$r_{ij}(K) := \text{card} \{ (k, l) \in Y_K \mid (k, l) \leq (i, j) \}$$

und $l_{ij}(K)$ die Anzahl aller Leerstellen $(k, l) \leq (i, j)$:

$$l_{ij}(K) := \text{card} \{ (k, l) \in \underline{n} \times \bar{m} - Y_K \mid (k, l) \leq (i, j) \} .$$

Also gilt für alle $(i, j) \in \underline{n} \times \bar{m}$:

$$r_{ij}(K) = im + j - l_{ij}(K) .$$

Definition $K, L \in K_{n,m}$ bezeichne Kombinationen von n .

Die Halbordnung $\leq$ auf $K_{n,m}$ mit

$$K \leq L : \Longleftrightarrow r_{ij}(K) \leq r_{ij}(L) \text{ für alle } (i,j) \in \underline{n} \times \bar{m}$$

heißt Kronecker Ordnung auf $K_{n,m}$.

Offenbar gilt

$$\left[K \leq L \Longleftrightarrow l_{ij}(K) \geq l_{ij}(L) \text{ für alle } (i,j) \in \underline{n} \times \bar{m} \right].$$

Da $K \in K_{n,m}$ eine Kombination von n ist, hat Y_K genau n Blöcke, diese seien $(i_1, j_1) < \dots < (i_n, j_n)$. Wir setzen

$$p(K) := ((i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n))$$

und nennen $p(K) = (p_1, \dots, p_n)$ die Position von K . Für Positionen $p(K) = ((i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n))$, $p(L) = ((i'_1, j'_1), \dots, (i'_n, j'_n))$ setzen wir

$$p(K) \leq p(L) : \Longleftrightarrow (i_t, j_t) \leq (i'_t, j'_t) \text{ für alle } 1 \leq t \leq n.$$

Lemma 6 Für alle Kombinationen $K, L \in K_{n,m}$ gilt:

$$K \leq L \Longleftrightarrow p(K) \geq p(L).$$

Beweis

" $\Rightarrow$ ": Sei $t \geq 1$ die kleinste Zahl mit $p_t(K) < p_t(L)$. Dann gilt

$$r_{(i_t, j_t)}(K) = t \text{ und } r_{(i_t, j_t)}(L) < t. \text{ Widerspruch.}$$

" $\Leftarrow$ ": Für alle $(i, j) \in \underline{n} \times \bar{m}$ ist

$$r_{ij}(K) = \text{card} \{ t \in \{1, \dots, n\} \mid p_t(K) \leq (i, j) \}.$$

Da $p_t(L) \leq p_t(K)$ für alle t ist

$$\begin{aligned} \text{card} \{ t \in \{1, \dots, n\} \mid p_t(K) \leq (i, j) \} &\leq \text{card} \{ t \in \{1, \dots, n\} \mid p_t(L) \leq (i, j) \} \\ &= r_{ij}(L). \end{aligned}$$



Für $0 \leq i \leq n$, $j \in \bar{m}$ sei $e_i(K) := \text{card} \{ l \in \bar{m} \mid K_l \geq i + 1 \}$ und
 $w_{ij}(K) := \text{card} \{ l \in \bar{m} \mid l \leq j \text{ und } K_l \geq i + 1 \}$.

Nach Definition der Kronecker Ordnung auf $K_{n,m}$ gilt

Lemma 7

$K \leq L \iff e_0(K) + \dots + e_{i-1}(K) + w_{ij}(K) \leq e_0(L) + \dots + e_{i-1}(L) + w_{ij}(L)$
 für alle $(i,j) \in \underline{n} \times \bar{m}$. (//)

Insbesondere erhalten wir für $j = m$ (vgl. 2.5.2):

$$\boxed{K \leq L \implies \text{Kon}(K) \geq \text{Kon}(L) .}$$

Eine nützliche Darstellung der Kombinationen $K \in K_{n,m}$ erhält man durch Einführung der Zählfunktion

$$z: \mathbb{Z} \times \bar{m} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(i,j) \longmapsto im + j .$$

z ist eine monotone Abbildung, d.h.

$$(k,l) \leq (i,j) \implies z(k,l) \leq z(i,j)$$

und shift - invariant, d.h.

$$z(i \pm 1, j) = z(i, j) \pm m .$$

Der Kombination $K = (K_1, \dots, K_m) \in K_{n,m}$ entspricht das m - Tupel

$s(K) = s = (s_1, \dots, s_m)$ mit

$$s_j := z(K_j - 1, j) = (K_j - 1)m + j$$

für alle $1 \leq j \leq m$. s_j hat die Eigenschaften

a) $s_1 + \dots + s_m = (n - 1)m + 1/2 m(m+1)$

b) $1 - m \leq s_j \leq nm$

c) $s_j \equiv j \pmod{m}$.

Umgekehrt existiert zu jedem m - Tupel $s = (s_1, \dots, s_m)$ mit a) , b) ,

c) eine eindeutig bestimmte Kombination $K \in K_{n,m}$ mit $s = s(K)$.

Sei $K \in K_{n,m}$ eine Kombination und für jede reelle Zahl x

$[x] := \max \{ l \in \mathbb{Z} \mid l \leq x \}$ die Gauß Klammer. Mit $s_j = z(K_{j-1}, j)$ gilt für alle $(i, j) \in \underline{n} \times \bar{m}$

Lemma 8

$$l_{ij}(K) = \sum_{s_1 \leq z(i,j)} \left[\frac{z(i,j) - s_1}{m} \right] .$$

Beweis

Wegen $z(i,j) - s_1 = (i - K_1 + 1)m + (j - 1)$ ist

$$\sum_{s_1 \leq z(i,j)} \left[\frac{z(i,j) - s_1}{m} \right] = \sum_{\substack{s_1 \leq z(i,j) \\ j \geq 1}} (i - K_1 + 1) + \sum_{\substack{s_1 \leq z(i,j) \\ j < 1}} (i - K_1) .$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber gerade $l_{ij}(K)$.

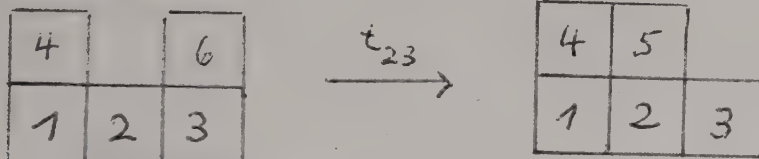


Mit $h_K(r) := \sum_{s_1 \leq r} \left[\frac{r - s_1}{m} \right]$, $r \in \mathbb{N}$, gilt daher

$$K \leq L \iff h_K(r) \geq h_L(r) \text{ für alle } r \in \mathbb{N} .$$

2.5.3.1 Transposition von Türmen

Seien $i, j \in \bar{m}$, $i \neq j$, und $K \in K_{n,m}$ mit $K_j \geq 1$. Die einfachste Operation auf der Kombination K ist wohl das Verschieben der j - ten Turmspitze auf den i - ten Turm:



Wir setzen also $t_{ij}K := \bar{K}$ mit

- (a) $\bar{K}_1 = K_1$ für $1 \neq i, j$
- (b) $\bar{K}_i = K_i + 1$
- (c) $\bar{K}_j = K_j - 1$.

Für die entsprechenden $(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m) := s(\bar{K})$ heißt dies

- (a) $\bar{s}_1 = s_1$ für $1 \neq i, j$
- (b) $\bar{s}_i = s_i + m$
- (c) $\bar{s}_j = s_j - m$.

Statt einzelne Turmspitzen kann man auch ganze Türme verschieben. Die genauere Analyse des Effektes einer solchen Modifikation von Kombinationen auf die Kronecker Ordnung führt auf die folgende Definition.

Sei $K \in K_{n,m}$ und $i, j \in \bar{m}$ mit $i < j$, $K_i \neq K_j + 1$.

Definition

$T_{ij}K := \bar{K}$ heißt Transposition von K, wenn gilt:

1) Ist $K_i = K_j$, so setzen wir $T_{ij}K = K$.

2) Für $K_i < K_j$ sei

$$\bar{K}_l = K_l \quad \text{für } l \neq i, j$$

$$\bar{K}_i = K_j$$

$$\bar{K}_j = K_i ;$$

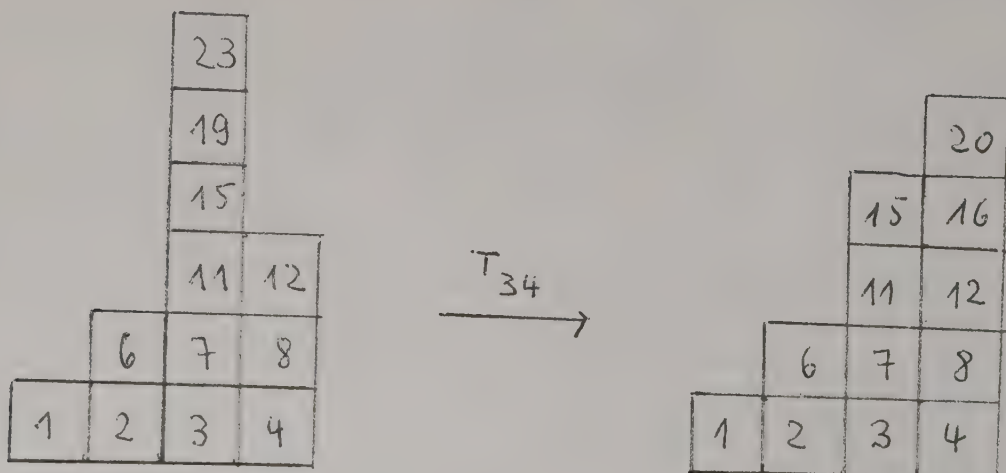
3) Ist $K_i > K_j + 1$ so ist

$$\bar{K}_l = K_l \quad \text{für } l \neq i, j$$

$$\bar{K}_i = K_j + 1$$

$$\bar{K}_j = K_i - 1 .$$

Für $j < i$ setzen wir noch $T_{ij}K := T_{ji}K$.



Zu ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$, setzen wir

$$d(a, b) := \min \{ l \in \mathbb{N}_0 \mid l \equiv b-a \pmod{m} \}$$

und $d(b, a) := -d(a, b)$. $d(a, b)$ ist also die kleinste natürliche Zahl d mit der Zerlegung $b - a = rm + d$. Insbesondere $0 \leq d(a, b) < m$ und $r = \left\lfloor \frac{b-a}{m} \right\rfloor$.

Sei $K \in K_{n,m}$ und $(s_1, \dots, s_m) = s(K)$. Für $i, j \in \bar{m}$, $i \neq j$, erhalten wir die folgende äquivalente Beschreibung der Transposition von K :

Für $s_i < s_j$ sei $T_{ij}s(K) = \bar{s}$ definiert per

$$\bar{s}_1 := s_1 \text{ für } 1 \neq i, j$$

$$\bar{s}_i := s_j - d(s_i, s_j)$$

$$\bar{s}_j := s_i + d(s_i, s_j)$$

und für $s_i > s_j$ setzen wir

$$\bar{s}_1 := s_1 \text{ für } 1 \neq i, j$$

$$\bar{s}_i := s_j + d(s_j, s_i)$$

$$\bar{s}_j := s_i - d(s_j, s_i) .$$

Dann gilt $T_{ij}s = T_{ji}s$ und $T_{ij}s(K) = s(T_{ij}K)$.

2.5.3.2 Kronecker Ordnung und Transposition

Wir führen die folgenden Hilfsgrößen ein:

$$h_K'(r) := h_K(r) - h_K(r-1) ,$$

$$h_{K,L}(r) := h_K(r) - h_L(r) ,$$

$$h_{K,L}'(r) := h_{K,L}(r) - h_{K,L}(r-1) ,$$

$r \in \mathbb{N}_0$ und $K, L \in K_{n,m}$.

Wegen $h(0) = 0$ und $h_{K,L}(r) = 0$ für $r > nm$ gilt:

$$(I) \left\{ \begin{aligned} h_K(r) &= \sum_{l=1}^r h_K'(l) \\ h_{K,L}(r) &= \sum_{l=1}^r h_{K,L}'(l) \\ &= - \sum_{l > r} h_{K,L}'(l) . \end{aligned} \right.$$

Es gilt

$$K \leq L \iff h_{K,L}(r) \geq 0 \text{ für alle } r \in \mathbb{N}.$$

Lemma 9 Sei $K \in K_{n,m}$ und $r = im + j$ mit $(i,j) \in \underline{n} \times \bar{m}$. Dann gilt:

$$h_K^i(r) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \text{ freie Position in } \underline{n} \times \bar{m} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis

Sei $(\underline{i}, \underline{j}) \in \underline{n} \times \bar{m}$ mit $\underline{i}m + \underline{j} = r - 1$. Nach Lemma 8 gilt $h_K^i(r) = l_{ij}(K) - l_{\underline{i}\underline{j}}(K)$. Daraus folgt die Behauptung sofort. 

Aus Lemma 9 folgt unmittelbar:

Korollar 4 Seien $K, L \in K_{n,m}$ und $r = lm + j$ für $l \geq 0$, $j \in \bar{m}$.

Dann ist

$$a) \quad h_K^i(r) = \begin{cases} 1 & \text{falls } r > s_j(K) \\ 0 & \text{falls } r \leq s_j(K) \end{cases}.$$

$$b) \quad h_{K,L}^i(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } s_j(K) < r \leq s_j(L) \\ 0 & \text{für } s_j(K), s_j(L) < r \text{ oder } s_j(K), s_j(L) \geq r \\ -1 & \text{für } s_j(L) < r \leq s_j(K) \end{cases}.$$



Für $K_j \geq s \geq 1$ sei $t_{ij}^s K := \underbrace{t_{ij} \circ \dots \circ t_{ij}}_{s \text{ - mal}}(K)$.

Für $L := t_{ij}^s K$ spezialisiert sich dann Korollar 4 zu

Lemma 10

$$h_{K,L}^i(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } r = s_i(K) + lm, \quad l = 1, \dots, s \\ -1 & \text{für } r = s_j(L) + lm, \quad l = 1, \dots, s \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Daraus folgt wiederum:

Korollar 5 Sei $K \in K_{n,m}$ und $L = t_{ij}K$.

a) Für $s_i(L) < s_j(K)$ gilt $K < L$.

b) Für $s_j(K) < s_i(L)$ gilt $L < K$.

Beweis

Nach Lemma 10 ist der Zuwachs $h'_{K,L}(r) = 1$ für $r = s_i(L)$, -1 für $r = s_j(K)$, 0 sonst. Also ist für $s_i(L) < s_j(K)$ stets $h_{K,L}(r) \geq 0$, während für $s_j(K) < s_i(L)$ $h_{K,L}(r) \leq 0$ ist. (//)

Ganz analog beweist man aus (I) und Lemma 10: ($s_i = s_i(K)$)

Korollar 6 Sei $K \in K_{n,m}$, $L = T_{ij}K$ und $s_i(K) + m < s_j(K)$. Dann gilt

$$h_{K,L}(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } r = s_i + lm + t, \quad 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s_j - s_i}{m} \right\rfloor, \quad 0 \leq t \leq d(s_i, s_j) - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

also $K < L$. (//)

Ist also für $s_i(K) + m < s_j(K)$ $\bar{K} := T_{ij}K$, so ist nach Korollar 6 der "Quader"

$$Q_{ij}(K) := \left\{ r = s_i(K) + lm + t \mid 0 \leq l \leq \bar{K}_i - K_i, \quad 0 < t < d(s_i(K), s_j(K)) \right\},$$

beziehungsweise dessen Kardinalzahl ein Maß dafür, wie weit sich die Kombinationen K , $\bar{K}$ voneinander unterscheiden. Es liegt daher nahe anzunehmen, daß diejenigen Kombinationen $\bar{K} = T_{ij}K$ covers von K sein werden, für die diese Menge $Q_{ij}(K)$ so klein wie möglich ist. Daß man auf diese Weise sogar eine Charakterisierung der covers von K bekommt, ist der Inhalt des folgenden Satzes [46]:

Jedes cover von K ist eine Transposition $T_{ij}K$ von K .

Präziser formuliert:

Theorem 5 Seien $K, L \in K_{n,m}$. Dann ist L ein cover von K bezüglich der Kronecker Ordnung $\preceq$ auf $K_{n,m}$ genau dann, wenn gilt:

- (1) $L = T_{ij}K$ für ein (i,j)
- (2) $s_i(K) + m < s_j(K)$
- (3) $\{s_1(K), \dots, s_m(K)\} \cap Q_{ij}(K) = \emptyset$.

Beweis

Daß die Bedingungen hinreichend sind ist klar.

Die Notwendigkeit zu zeigen ist der schwere Teil. Um die Schreibarbeit zu erleichtern, führen wir für Kombinationen $K, L, \bar{K} \in K_{n,m}$ die Bezeichnungen

$$s_i := s_i(K) \quad , \quad \hat{s}_i := s_i(L) \quad , \quad \bar{s}_i := s_i(\bar{K}) \quad , \quad i \in \bar{m} \quad ,$$

ein.

Seien also $K, L \in K_{n,m}$ gegeben mit $K \not\preceq L$. Es genügt zu zeigen, daß es ein Paar $(i,j) \in \bar{m} \times \bar{m}$ gibt mit $s_i + m < s_j$ und $K \preceq T_{ij}K \preceq L$. Dann existiert nämlich auch ein Paar $(\underline{i}, \underline{j})$ mit $Q_{\underline{ij}}(K) \subset Q_{ij}(K)$, so daß $K \preceq T_{\underline{ij}}K \preceq L$ und die Bedingungen (2), (3) für $(\underline{i}, \underline{j})$ erfüllt sind.

Wir setzen $\bar{K} := T_{ij}K$.

Konstruktion von $(\underline{i}, \underline{j})$:

Setze

$$r_+ := \max \{ r \in \mathbb{N} \mid h'_{KL}(r) = 1 \}$$

$$r_- := \max \{ r \in \mathbb{N} \mid h'_{KL}(r) = -1 \} .$$

Aus Korollar 4b) folgt:

$$r_+ = \max \{ \hat{s}_1 \mid \hat{s}_1 > s_1 \} =: \hat{s}_i$$

$$r_- = \max \{ s_1 \mid s_1 > \hat{s}_1 \} =: s_j .$$

Angenommen, $r_+ > r_-$. Dann gilt für alle $r > r_+$

$$h_{KL}(r) = h_{KL}(r-1) + h'_{KL}(r) = h_{KL}(r-1)$$

und

$$h_{KL}(r_+) = h_{KL}(r_+ - 1) + 1 .$$

Also $h_{KL}(r) \geq 1$ für $r > r_+$ im Widerspruch zu $h_{KL}(r) = 0$ für $r > nm$.

Daher gilt

$$s_i + m \leq \hat{s}_i < s_j .$$

Sei

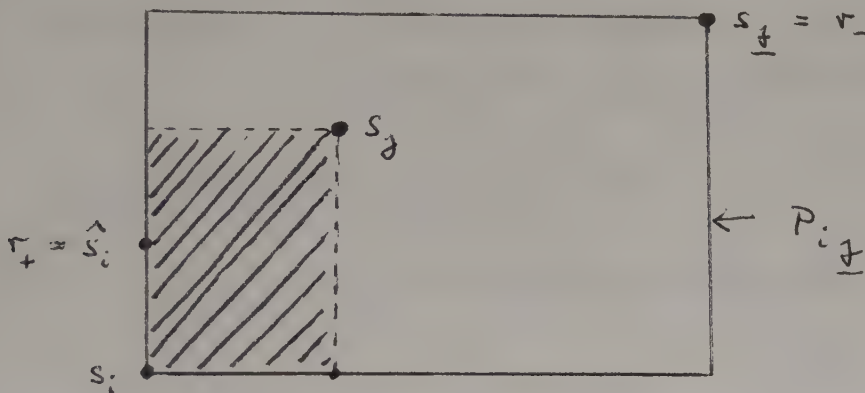
$$P_{ij} := \left\{ r = s_i + lm + t \mid 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s_j - s_i}{m} \right\rfloor, 0 \leq t \leq d(s_i, s_j) \right\} .$$

Sei $j \in \bar{m}$ die eindeutig bestimmte Zahl mit

$$(a) \quad s_j \in P_{ij}$$

$$(b) \quad d(s_i, s_j) = \min \{ d(s_i, s_k) \mid s_i + m < s_k \} .$$

Insbesondere ist $s_j \leq s_{\underline{j}}$.



Für alle Indizes q zwischen i und j (modulo m gerechnet) gilt nach Konstruktion von j : $s_q \leq s_i + m$. Präziser:

Notiz (1) Für $l \geq 1$ und $1 \leq t < d(s_i, s_j)$ sei $s_i + lm + t = pm + q$ mit $1 \leq q \leq m$. Dann ist $s_q \leq s_i + m$ oder $s_q \gg \hat{s}_q$.

Beweis

Angenommen, $s_q > s_i + m$ und $s_q < \hat{s}_q$. Wegen Korollar 4b) und der Konstruktion von $s_{\underline{j}} = r_-$ ist dann $s_q \in P_{ij}$ und $d(s_i, s_q) < d(s_i, s_j)$.

Widerspruch.

Q.E.D.

Notiz (2) Für $l \geq 1$ und $1 \leq t < d(s_i, s_j)$ ist

$$h'_{KL}(s_i + lm + t) \geq 0.$$

Beweis

Nach Notiz (1) ist mit $s_i + lm + t =: pm + q$, $1 \leq q \leq m$, $s_q \gg \hat{s}_q$ oder $s_q < s_i + lm + t$. Nach Korollar 4b) folgt daher die Behauptung.

Q.E.D.

Wegen $h_{KL}(s_i + lm) = h'_{KL}(s_i + lm) + h_{KL}(s_i + lm - 1)$

$$\gg h'_{KL}(s_i + lm) = 1$$

für $1 \leq l \leq (\hat{s}_i - s_i)/m$, erhalten wir mit Korollar 4b) und Korollar 6 die Abschätzung

$$h_{KL}(s_i + lm + t) \gg 1 \quad \text{für alle } 1 \leq l \leq (\hat{s}_i - s_i)/m, \quad 0 \leq t < d(s_i, s_j).$$

Ist $s_j > \hat{s}_i = r_+$, so folgt aus $h'_{KL}(r) \gg 0$ für $r > r_+$:

$$h_{KL}(r) = - \sum_{l > r} h'_{KL}(l) \gg - h'_{KL}(r_-) = 1$$

für $r_+ < r < r_-$.

Da $s_j \leq r_- = s_j$ erhalten wir die Abschätzung:

$$h_{KL}(s_i + lm + t) \gg 1 \quad \text{für } 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s_j - s_i}{m} \right\rfloor, \quad 0 \leq t < d(s_i, s_j).$$

Setze $\overline{K} := T_{ij}^K$. Dann ist nach Korollar 6 $K < T_{ij}^K$ und

$$h_{\overline{KL}}(r) = h_{KL}(r) - h_{KK}(r)$$

$$= \begin{cases} h_{KL}(r) - 1 & \text{für } r = s_i + lm + t, \quad 1 \leq l \leq \left\lfloor \frac{s_j - s_i}{m} \right\rfloor, \quad 0 \leq t < d(s_i, s_j) \\ h_{KL}(r) & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $r \geq 0$. Nach Voraussetzung ist $h_{KL}(r) \gg 0$ und die obige Abschätzung liefert für alle $r \geq 0$ die Ungleichung $h_{\overline{KL}}(r) \gg 0$. Daher gilt auch $\overline{K} \ll L$ und Theorem 5 ist bewiesen.



2.5.4 Anordnung der Kronecker Schichten

Die Kronecker Ordnung $\preceq$ auf den Kombinationen $K_{n,m}$ ist gerade die Adhärenz Ordnung auf den Kronecker Schichten $\text{Kro}_K(k)$:

Theorem 6 Seien $K, L \in K_{n,m}$ Kombinationen und $\preceq$ die Kronecker Ordnung auf $K_{n,m}$. $\overline{\text{Kro}_L(k)}$ bezeichne den relativen Abschluß in $\sum_{n,m}(k)$. Dann gilt:

$$\text{Kro}_K(k) \subset \overline{\text{Kro}_L(k)} \iff \text{Kro}_K(k) \cap \overline{\text{Kro}_L(k)} \neq \emptyset \iff K \preceq L .$$

Beweis

Nach Korollar 2.5.2.3 gilt die Äquivalenz

$$\text{Kro}_K(k) \subset \overline{\text{Kro}_L(k)} \iff \text{Kro}_K(k) \cap \overline{\text{Kro}_L(k)} \neq \emptyset .$$

a) " $\text{Kro}_K(k) \cap \overline{\text{Kro}_L(k)} \neq \emptyset \Rightarrow K \preceq L$ "

Sei $(A, B) \in \text{Kro}_K(k) \cap \overline{\text{Kro}_L(k)}$. Dann gilt für jedes $(i, j) \in \underline{n} \times \overline{m}$:

$$\text{rg}(B, \dots, A^{i-1}B, A^i b_1, \dots, A^i b_j) = r_{ij}(K) \quad (\text{siehe 2.5.3}) .$$

Da die Rangfunktion nach oben halbstetig ist, gilt für jedes genügend nahe an (A, B) gelegene Matrixpaar $(A, B) \in \text{Kro}_L(k)$:

$$\begin{aligned} \text{rg}(B, \dots, A^{i-1}B, A^i b_1, \dots, A^i b_j) &= r_{ij}(L) \\ &\geq r_{ij}(K) . \end{aligned}$$

Da (i, j) beliebig war, ist $r_{ij}(K) \leq r_{ij}(L)$ für alle $(i, j) \in \underline{n} \times \overline{m}$, also $K \preceq L$. Q.E.D.

b) " $K \preceq L \Rightarrow \text{Kro}_K(k) \subset \overline{\text{Kro}_L(k)}$ "

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß L ein cover von K ist, d.h. es gibt $(i, j) \in \underline{n} \times \overline{m}$ mit $L = T_{ij}K$ (Theorem 2.5.3.5). Es reicht aus, ein Paar $(A, B) \in \text{Kro}_K(k) \cap \overline{\text{Kro}_L(k)}$ zu finden.

Konstruktion von (A, B) :

Sei $(A, B) \in \text{Kro}_K(k)$ bestimmt wie in Lemma 2.5.2.4. (A, B) hat die

Eigenschaften :

(1) $A^r b_s = e_d(r,s)$, mit $(r,s) \in \underline{n} \times \bar{m}$, $e_d = d$ -ter Standardbasis - vektor des k^n und $d(r,s) = \text{card} \{ (i,j) \in \underline{n} \times \bar{m} \mid i < K_j , (i,j) \leq (r,s) \}$ (d.h. $d(r,s) = r_{rs}(K)$).

(2) $A^{K_s} b_s = 0$ für alle $s \in \bar{m}$.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Paar $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \text{Kro}_{\underline{L}}(k)$, so daß bezüglich einer festen Norm auf $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ $\|(\tilde{A}, \tilde{B}) - (A, B)\| < \varepsilon$ ist.

Konstruktion von $(\tilde{A}, \tilde{B})$:

Es ist $L = T_{ij}K$ mit $i < j$, $i, j \in \bar{m}$, $K_i \neq K_j + 1$; siehe Theorem 2.5.3.5

(2) . Um den trivialen Fall $K = L$ auszuschließen , sei $K_i \neq K_j$.

1. Fall : $K_i < K_j$

Dann ist $L = (L_1, \dots, L_m)$ mit

$$L_1 = K_1 \text{ für } l \neq i, j$$

$$L_i = K_j$$

$$L_j = K_i .$$

Für $K_i = 0$ setze

$$\tilde{A} := A \text{ und } \tilde{B} := (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m) \text{ mit}$$

$$\tilde{b}_s := b_s \text{ für } s \neq i$$

$$\tilde{b}_i := b_i + \varepsilon b_j .$$

Für $K_i \geq 1$ setze

$$\tilde{B} := B , \tilde{A}^r \tilde{b}_s := A^r b_s \text{ für alle } r \geq 0 , s \neq i$$

$$\tilde{A} b_i := A b_i , \dots , \tilde{A} (A^{K_i-2} b_i) := A^{K_i-1} b_i ,$$

$$\tilde{A} (A^{K_i-1} b_i) := A^{K_i} b_i + \varepsilon A^{K_i} b_j = \varepsilon A^{K_i} b_j .$$

In beiden Fällen ist $(\tilde{A}, \tilde{B})$ wohldefiniert und ε -nahe an (A, B) ; für genügend kleines ε also auch $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$. Wegen (1) hat das

Paar $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \sum_{n,m}(k)$ auch die richtigen Kronecker Indizes $(L_1, \dots, L_m)$. Also ist $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \text{Kro}_L(k)$.

2. Fall : $K_i > K_j + 1$

In diesem Fall ist $L = (L_1, \dots, L_m)$ gegeben durch

$$L_l = K_l \text{ für } l \neq i, j$$

$$L_i = K_j + 1$$

$$L_j = K_i - 1.$$

Für $K_j = 0$ setze

$$\tilde{A} := A \text{ und } \tilde{B} := (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m) \text{ mit}$$

$$\tilde{b}_s := b_s \text{ für } s \neq j$$

$$\tilde{b}_j := b_j + \varepsilon A b_i = \varepsilon A b_i.$$

Für $K_j \geq 1$ setze

$$\tilde{B} := B, \tilde{A}^r \tilde{b}_s := A^r b_s \text{ für alle } r \geq 0, s \neq j,$$

$$\tilde{A} b_j := A b_j, \dots, \tilde{A} (A^{K_j-2} b_j) := A^{K_j-1} b_j,$$

$$\tilde{A} (A^{K_j-1} b_j) := A^{K_j} b_j + \varepsilon A^{K_j+1} b_i = \varepsilon A^{K_j+1} b_i.$$

Wieder ist in beiden Fällen das Paar $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ wohldefiniert und ε - nahe an (A, B) ; für hinreichend kleines ε also auch $(\tilde{A}, \tilde{B})$ in $\sum_{n,m}(k)$. Man prüft auch leicht nach, daß $(\tilde{A}, \tilde{B})$ auch die richtigen Kronecker Indizes $(L_1, \dots, L_m)$ hat, d.h. $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \text{Kro}_L(k)$.

Dies zeigt insgesamt, daß der Durchschnitt $\text{Kro}_K(k) \cap \overline{\text{Kro}_L(k)}$ nicht - leer ist, denn er enthält das System (A, B) . Damit ist b) bewiesen.



Nach diesem Theorem ist insbesondere der topologische Abschluß $\overline{\text{Kro}_K(k)}$ der Kronecker Schicht $\text{Kro}_K(k)$ in $\sum_{n,m}(k)$ gegeben durch

$$\overline{\text{Kro}_K(k)} = \left\{ (\Lambda, B) \in \tilde{\Sigma}_{n,m}(k) \mid r_B(B, \dots, \Lambda^{i-1} B, \Lambda^i b_1, \dots, \Lambda^i b_j) \leq r_{ij}(k) \text{ für } \right. \\ \left. \text{alle } (i,j) \in \underline{n} \times \bar{m} \right\}$$

Also ist $\overline{\text{Kro}_K(k)}$ eine algebraische Teilvarietät von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$.

Theorem 7 Sei $K \in K_{n,m}$.

Die abgeschlossene Hülle $\overline{\text{Kro}_K(k)}$ ist eine algebraische Teilvarietät von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$.



Theorem 8

Die Zerlegung von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})$ in Kronecker Schichten $\text{Kro}_K(\mathbb{R})$, $K \in K_{n,m}$, ist eine Whitney Stratifikation von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Beweis

Zur Terminologie vgl. Gibson, Wirthmüller et al. [22].

Nach Theorem 4 sind die Kronecker Schichten $\text{Kro}_K(\mathbb{R})$ Bahnen einer semialgebraischen Gruppenaktion auf $\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})$ und bilden daher nach eine Whitney Stratifikation von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})$.



2.6 Systeme mit r - dimensionalem Erreichbarkeitsraum

Sei $1 \leq r \leq n$ eine natürliche Zahl und $S_{n,m}^r(k)$ die Menge aller Systeme $(A,B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ mit

$$\text{rg}(B, \dots, A^{n-1}B) = r.$$

Theorem 1

$S_{n,m}^r(k)$ ist eine (reell oder komplex) analytische Untermannigfaltigkeit von $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ der Dimension $n^2 + rm$.

Beweis

Zu jeder Kombination $K \in K_{r,m}$ sei $R_K(A,B)$ die $n \times r$ - Matrix

$$(b_1, \dots, A^{K_1-1} b_1, \dots, b_m, \dots, A^{K_m-1} b_m).$$

Setze $N_K := \{(A,B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \mid \text{rg } R_K(A,B) = r\}$ und $S_K := S_{n,m}^r(k) \cap N_K$.

Da N_K Zariski - offen ist, ist $(S_K)_{K \in K_{r,m}}$ eine endliche, offene

Überdeckung von $S_{n,m}^r(k)$.

Sei $\xi_{n,m}^r$ das analytische Teilbündel

$$\xi_{n,m}^r := mU_{r,n} \oplus \text{Hom}(U_{r,n}^\perp, E_{r,n})$$

von $mE_{r,n} \oplus \text{Hom}(U_{r,n}^\perp, E_{r,n})$; vgl. Abschnitt 2.2. Nach Lemma 2.2.4 ist

$$G_K: N_K \longrightarrow mE_{r,n} \oplus \text{Hom}(U_{r,n}^\perp, E_{r,n})$$

$$(A,B) \longmapsto (R_K(A,B); (A^{K_1} b_1, \dots, A^{K_m} b_m), A \mid (\text{Span } R_K(A,B))^\perp)$$

ein(analytischer)Diffeomorphismus. Also ist auch die Einschränkung

$g_K: S_K \longrightarrow \xi_{n,m}^r$, $g_K := G_K|_{S_K}$, von G_K bijektiv.

Wie in Abschnitt 2.2 können wir an dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N_K & \xrightarrow{G_K} & mE_{r,n} \oplus \text{Hom}(U_{r,n}^\perp, E_{r,n}) \\ \uparrow \text{Inklusion} & & \uparrow \text{Einbettung} \\ S_K & \xrightarrow{g_K} & \xi_{n,m}^r \end{array}$$

ablesen, daß es eine eindeutig bestimmte analytische Struktur auf S_K gibt, so daß S_K eine Untermannigfaltigkeit von $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ und g_K ein Diffeomorphismus ist. Für Kombinationen $K, L \in K_{r,m}$ gilt auf dem Durchschnitt $S_K \cap S_L$:

$$g_K \circ g_L^{-1} = (g_K \circ g_L^{-1}) \Big|_{g_L(S_L)}.$$

Daher sind die Übergangsfunktionen $g_K \circ g_L^{-1} : \xi_{n,m}^r \rightarrow \xi_{n,m}^r$ analytisch und die so erklärten lokalen analytischen Strukturen auf $S_{n,m}^r(k)$ definieren eine eindeutig bestimmte analytische Struktur auf $S_{n,m}^r(k)$. Bezüglich dieser Struktur ist S_K eine offene Untermannigfaltigkeit von $S_{n,m}^r(k)$ und daher wiederum auch $S_{n,m}^r(k)$ eine Untermannigfaltigkeit von $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$.

Da S_K offen in $S_{n,m}^r(k)$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \dim_k S_{n,m}^r(k) &= \dim_k S_K \\ &= \dim_k \xi_{n,m}^r \\ &= nr + mr + n(n-r) \\ &= n^2 + rm. \end{aligned}$$



Da sich Rangbedingungen an eine Matrix $R \in k^{n \times n}$ stets durch geeignete Minorenbedingungen ausdrücken lassen, gilt analog zu Theorem 2.3.1

Lemma 1

$S_{n,m}^r(k)$ ist quasi - affin.



Theorem 2

- a) Für $(r,m) \neq (n,1)$ ist $S_{n,m}^r(k)$ zusammenhängend.
- b) Für $(r,m) = (n,1)$ ist $S_{n,m}^r(\mathbb{C})$ zusammenhängend.
- c) Für $(r,m) = (n,1)$ hat $S_{n,m}^r(R)$ genau 2 Komponenten.

Beweis

$GL_n(\mathbb{C})$ ist zusammenhängend und $GL_n(R)$ zerfällt in die beiden Kompo-

nenten

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \left\{ T \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det T > 0 \right\} ,$$

$$GL_n^-(\mathbb{R}) = \left\{ T \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det T < 0 \right\} .$$

Nach Lemma 2.2.6 ist daher $S_{n,1}^n(\mathbb{Q})$ zusammenhängend und $S_{n,1}^n(\mathbb{R})$ zerfällt in die Komponenten

$$S_n^+ := \left\{ (A, b) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n \mid \det(b, \dots, A^{n-1}b) > 0 \right\} ,$$

$$S_n^- := \left\{ (A, b) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n \mid \det(b, \dots, A^{n-1}b) < 0 \right\} .$$

Sei nun $1 \leq r \leq n-1$, $m \geq 1$, und $K = (K_1, \dots, K_m)$ eine Kombination von r . Nach Thm. 2.4.1 und Theorem 2.6.1 ist die Hermite Schicht

$$Her_K(k) = \left\{ (A, B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \mid (A, B) \text{ hat Hermite Indizes } K \right\}$$

eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von $S_{n,m}^r(k)$ der Dimension

$$\dim_k Her_K(k) = rn + K_1 + (K_1 + K_2) + \dots + (K_1 + \dots + K_{m-1}) .$$

Wir haben ferner in Abschnitt 2.4 gezeigt, daß es eine eindeutig bestimmte generische Hermite Schicht $Her_{K_1}(k)$, $K_1 = (r, 0, \dots, 0)$, in $S_{n,m}^r(k)$ gibt, so daß für alle Kombinationen $K \in K_{r,m}$, $K \neq K_1$,

$$\dim_k Her_K(k) < \dim_k Her_{K_1}(k) = r(n+m)$$

ist. Also ist $Her_{K_1}(k)$ zusammenhängend und dicht in $S_{n,m}^r(k)$ und daher ist auch $S_{n,m}^r(k)$ zusammenhängend.

Für $r = n$ und $m \geq 2$ hat Brockett [10] gezeigt, daß $S_{n,m}^n(k) = \sum_{n,m}^{\sim}(k)$ zusammenhängend ist . Brockett's Beweis ist jedoch relativ kompliziert, während sich mit dem hier entwickelten Instrumentarium ein knapper Beweis formulieren läßt. In der Tat, nach Theorem 2.6.1 ist für alle $1 \leq r \leq n-1$ $S_{n,m}^r(k)$ eine Untermannigfaltigkeit $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$ der Kodimension $(n-r)m \geq 2$. Daher ist

$$S_{n,m}^n(k) = k^{n \times n} \times k^{n \times m} - \bigcup_{r=0}^{n-1} S_{n,m}^r(k)$$

zusammenhängend .



Mit Satz 1.1.2 können wir aus Theorem 2 folgern:

Lemma 2

$S_{n,m}^r(k)$ ist für $(r,m) \neq (n,1)$ irreduzibel .



Es scheint relativ schwierig zu sein , die Topologie der Mannigfaltigkeiten $S_{n,m}^r(k)$ zu untersuchen . Für $r = n$ wird dies ansatzweise im nächsten Abschnitt gemacht; für $m = 1$ identifizieren wir die Zahl r mit der Kombination $(r) \in K_{r,1}$ und können damit die Theoreme 2.2.1 und 2.2.2 auch so interpretieren:

Theorem 3

Für $1 \leq r \leq n$ ist $S_{n,1}^r(k)$ eine analytische Untermannigfaltigkeit $k^{n \times n} \times k^n$ der Dimension $n^2 + r$.

$S_{n,1}^r(k)$ ist ein affines Faserbündel über der Stiefel Mannigfaltigkeit $V_{r,n}(k)$ und der Kohomologiering $H^*(S_{n,1}^r(k); \mathbb{Z})$ ist isomorph zum Kohomologiering $H^*(V_{r,n}(k); \mathbb{Z})$.



2.7 Nicht erreichbare Systeme

Theorem 1

$S_{n,m}(k) = \bigcup_{r=0}^{n-1} S_{n,m}^r(k)$ ist eine zusammenhängende , irreduzible algebraische Varietät der Dimension $n^2 + (n-1)m$.

Beweis

Die irreduzible Varietät $S_{n,m}^{n-1}(k)$ ist offen und dicht in $S_{n,m}(k) = \{ (A,B) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \mid \text{rg}(B, \dots, A^{n-1}B) < n \}$.

Daraus folgt die Behauptung unmittelbar.



Sei $\pi_i(X)$ die i -te Homotopiegruppe eines topologischen Raumes X ; vgl. z.B. Bott , Tu [7].

Die Menge $\sum_{n,m} S_{n,m}(k)$ aller erreichbaren Systeme (A,B) läßt sich

als Differenzmenge algebraischer Varietäten beschreiben:

$$\tilde{\Sigma}_{n,m}(k) = k^{n \times n} \times k^{n \times m} - S_{n,m}(k) .$$

Nach Theorem 1 gilt für die reellen Kodimensionen von $S_{n,m}(k)$ in $k^{n \times n} \times k^{n \times m}$:

$$(2.7.1) \quad \boxed{\text{codim}_{\mathbb{R}} S_{n,m}(\mathbb{R}) = m ,}$$

$$(2.7.2) \quad \boxed{\text{codim}_{\mathbb{R}} S_{n,m}(\mathbb{C}) = 2m .}$$

Theorem 2 Sei $m \geq 2$.

$$a) \quad \pi_i(\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq m-2 .$$

$$b) \quad \pi_i(\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{C})) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq i \leq 2m-2 .$$

Beweis

Wir beschränken uns auf den Beweis von a) ; b) beweist man entsprechend.

Sei $S^i \subset \mathbb{R}^{i+1}$ die i - Sphäre und $f: S^i \rightarrow \tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})$ eine stetige Abbildung . Sei $a \in \tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})$ fest und $g: S^i \rightarrow \tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})$ die konstante Abbildung $g(x) = a$. Wir zeigen:

Es gibt eine Homotopie $H: S^i \times [0,1] \rightarrow \tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})$, die f mit g verbindet .

Für $\varepsilon > 0$ genügend klein wählen wir eine C^∞ Abbildung $f_0: S^i \rightarrow \tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})$ so daß f_0 ε - nahe an f in der C^0 Topologie ist ; [36].

Da S^i kompakt ist , ist dann bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$

$$H_0: S^i \times [0,1] \rightarrow \tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R}) ,$$

$$H_0(x,t) := tf(x) + (1-t)f_0(x)$$

eine Homotopie zwischen f_0 und f .

$S_{n,m}(\mathbb{R})$ ist Vereinigung der Untermannigfaltigkeiten

$$A_r := S_{n,m}^r(\mathbb{R}) \quad , \quad r = 0, \dots, n-1$$

von $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $\text{codim}_{\mathbb{R}} A_r \geq m$ für alle $0 \leq r \leq n-1$.

Sei $\text{inc}: \sum_{n,m}^{\sim}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ die Inklusionsabbildung und $\tilde{f}_0 := \text{inc} \circ f_0$ das Kompositum von f_0 mit inc ; $\tilde{f}_1 := \text{inc} \circ g$.

Sei

$$H_1: S^i \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$H_1(x,t) := t\tilde{f}_1(x) + (1-t)\tilde{f}_0(x)$$

die lineare Homotopie von $\tilde{f}_0$ mit $\tilde{f}_1$.

$\tilde{f}_0$ und $\tilde{f}_1$ sind transversal zu allen Untermannigfaltigkeiten A_r (wegen $\tilde{f}_j(S^i) \cap A_r = \emptyset$, $j = 0,1$, für $0 \leq r \leq n-1$). Nach dem Thom'schen Transversalitätssatz, vgl. Guillemin, Pollack [23], existiert dann eine C^∞ Abbildung $\tilde{H}_1: S^i \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ mit

$$(1) \quad \tilde{H}_1 = H_1 \text{ auf } S^i \times \{0,1\},$$

$$(2) \quad \tilde{H}_1 \text{ ist transversal zu } A_r \text{ für alle } 0 \leq r \leq n-1.$$

Wegen

$$\dim(S^i \times [0,1]) = i + 1 \leq m - 1$$

ist (2) äquivalent zu

$$(2') \quad \tilde{H}_1(S^i \times [0,1]) \cap A_r = \emptyset \text{ für alle } 0 \leq r \leq n-1, \text{ d.h.}$$

$$\tilde{H}_1(S^i \times [0,1]) \subset \sum_{n,m}^{\sim}(\mathbb{R}).$$

Die Zusammensetzung der Homotopien H_0 , $\tilde{H}_1$ liefert dann die gesuchte Homotopie $H: S^i \times [0,1] \rightarrow \sum_{n,m}^{\sim}(\mathbb{R})$ von f mit g . Damit ist a) bewiesen.



Abschließend bestimmen wir den singulären Ort der algebraischen Hyperfläche $S_{n,1}(k) = \{(A,b) \in k^{n \times n} \times k^n \mid \det(b, \dots, A^{n-1}b) = 0\}$. Sei $R: k^{n \times n} \times k^n \rightarrow k^{n \times n}$ die polynomiale Abbildung, gegeben durch

$$R(A,b) := (b, \dots, A^{n-1}b).$$

Dann ist der singuläre Ort $\Sigma(S_{n,1}(K))$ von $S_{n,1}(k)$ definiert als die Menge aller Paare $(A,b) \in S_{n,1}(k)$ mit $\text{Ddet}R(A,b) = 0$, d.h. die Menge aller kritischen Punkte der Determinantenfunktion

$$\text{det}R: k^{n \times n} \times k^n \rightarrow k, (A,b) \mapsto \det(b, \dots, A^{n-1}b).$$

Sei $\text{adj}(R)$ die adjungierte Matrix zur $n \times n$ - Matrix R . Aus der Formel

$$D \det|_R(H) = \text{Tr}(\text{adj}(R)H)$$

für die Frechet Ableitung der Determinantenfunktion folgt :

$$(3) \quad D \det R(A,b)(H,h) = \text{Tr}(\text{adj}(R(A,b))DR(A,b)(H,h)) .$$

Lemma 3

Die Tangentialabbildung $DR(A,b): k^{n \times n} \times k^n \rightarrow k^{n \times n}$ ist genau dann surjektiv, wenn $\text{rg } R(A,b) \geq n - 1$.

Beweis

Durch wiederholte Anwendung der Produktregel folgt:

$$DR(A,b)(H,h) = (h, Ah + Hb, A^2h + HAb + AHb, \dots, A^{n-1}h + HA^{n-2}b + \dots + A^{n-2}Hb) .$$

Das Gleichungssystem $DR(A,b)(H,h) = (x_0, \dots, x_{n-1})$ ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$(4) \quad \begin{cases} h = x_0 \\ HA^i b = x_{i+1} - Ax_i \quad \text{für } i = 0, \dots, n-2 : \end{cases}$$

(4) ist sicherlich richtig für $i = 0$. Sei also $HA^i b = x_{i+1} - Ax_i$ für alle $i \leq j - 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= A^{j+1}h + HA^j b + AHA^{j-1}b + \dots + A^j Hb \\ &= A^{j+1}h + HA^j b + A(x_j - Ax_{j-1}) + \dots + A^j(x_1 - Ax_0) \\ &= A^{j+1}x_0 + HA^j b + Ax_j - A^{j+1}x_0 \\ &= HA^j b + Ax_j . \end{aligned}$$

Also erhalten wir die Äquivalenzen

$$\text{rg}(b, \dots, A^{n-1}b) \geq n - 1 \iff \text{rg}(b, \dots, A^{n-2}b) \geq n - 1 \iff$$

$$\iff (4) \text{ hat stets eine Lösung } (H,h) \iff DR(A,b) \text{ ist surjektiv.}$$



Theorem 3

Der singuläre Ort $\sum(S_{n,1}(k))$ von $S_{n,1}(k)$ ist $\overline{S_{n,1}^{n-2}(k)}$.

Insbesondere hat $\sum(S_{n,1}(k))$ die Kodimension 2 in $k^{n \times n} \times k^n$.

Beweis

Sei $\text{ImDR}(A,b) \subset k^{n \times n}$ der Bildraum der linearen Abbildung

$(H,h) \mapsto \text{DR}(A,b)(H,h)$. Aus (3) folgt

$\text{DdetR}(A,b) = 0 \Leftrightarrow \text{adj}(R(A,b))^T$ steht senkrecht auf $\text{ImDR}(A,b)$.

Wegen

$$(A,b) \in \overline{S_{n,1}^{n-2}(k)} = \bigcup_{r=0}^{n-2} S_{n,1}^r(k) \Leftrightarrow \text{adj}(R(A,b)) = 0$$

ist $\overline{S_{n,1}^{n-2}(k)} \subset \sum(S_{n,1}(k))$.

Angenommen, $\text{DdetR}(A,b) = 0$ und $\text{rg } R(A,b) \geq n-1$. Aus Lemma 3 folgt dann $\text{ImDR}(A,b) = k^{n \times n}$, also $\text{adj}(R(A,b)) = 0$. Widerspruch.



Besonders übersichtlich ist der Fall $n = 2$. Hier gilt:

Der singuläre Ort der nicht erreichbaren Systeme $S_{2,1}(k)$ ist genau die Klasse der freien Systeme $\{(A,0) \in k^{2 \times 2} \times k^2\}$!

3. Der Orbit Raum linearer erreichbarer Systeme

k sei der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bzw. der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$;
 $m, n \geq 1$ seien natürliche Zahlen .

3.1 Ähnlichkeitsaktion auf erreichbaren Paaren

Betrachte ein lineares dynamisches System , gegeben durch das System von Differentialgleichungen

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

mit $x(t) \in k^n$, $u(t) \in k^m$, $A \in k^{n \times n}$, $B \in k^{n \times m}$, $t \in \mathbb{R}$.

Sei $S \in GL_n(k)$ eine invertierbare Matrix und $x(t)$ eine Lösung des Systems (1) bei vorgegebener Kontrolle $u(t)$. Dann genügt $z(t) = S^{-1}x(t)$ dem Differentialgleichungssystem

$$(1') \quad \dot{z}(t) = SAS^{-1}z(t) + SBu(t) .$$

Jeder lineare Basiswechsel im Zustandsraum k^n , vermittelt durch eine invertierbare Matrix $S \in GL_n(k)$, transformiert daher das (1) entsprechende Paar (A,B) in das äquivalente System (SAS^{-1}, SB) .

Die so eingeführte lineare algebraische Gruppenaktion auf $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha : GL_n(k) \times \tilde{\Sigma}_{n,m}(k) \longrightarrow \tilde{\Sigma}_{n,m}(k) \\ (S,A,B) \longmapsto (SAS^{-1}, SB) \end{array} \right.$$

heißt die Ähnlichkeitsaktion auf $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$.

Lemma 1

α ist eine freie Aktion und der Graph von α ist eine abgeschlossene analytische Untermannigfaltigkeit von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k) \times \tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$.

Beweis

Sei $(A,B) \in \tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$ und $R(A,B)$ die lineare Abbildung $k^{mn} \rightarrow k^n$ gegeben durch die Matrix $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$. Wegen $\text{rg } R(A,B) = n$, gibt es eine invertierbare $n \times n$ - Teilmatrix X von $(B, \dots, A^{n-1}B)$. Sei $S \in GL_n(k)$ mit $(SAS^{-1}, SB) = (A,B)$. Da $R(SAS^{-1}, SB) = SR(A,B)$, ist

$SX = X$ und daher $S = I$ (Einheitsmatrix). Dies zeigt, daß α frei ist.

Sei $G: GL_n(k) \times \tilde{\Sigma}_{n,m}(k) \rightarrow \tilde{\Sigma}_{n,m}(k) \times \tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$ die Graphenabbildung

$G(S,A,B) := ((A,B), (SAS^{-1}, SB))$ von α . Da α frei operiert, ist G eine injektive Immersion. Es reicht daher zu zeigen, daß das Bild $\text{Im}(G)$ von G abgeschlossen in $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k) \times \tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$ ist.

Seien dazu (A_j, B_j) , $(S_j A_j S_j^{-1}, S_j B_j) \in \tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$ konvergente Folgen in $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$:

$$\lim (A_j, B_j) = (A, B) \in \tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$$

$$\lim (S_j A_j S_j^{-1}, S_j B_j) = (A_0, B_0) \in \tilde{\Sigma}_{n,m}(k).$$

Behauptung

Es gibt $S_0 \in GL_n(k)$, so daß S_j gegen S_0 konvergiert.

Daraus folgt die Abgeschlossenheit von $\text{Im}(G)$, denn aus der Konvergenz von (S_j) folgt die Konvergenz von $(S_j A_j S_j^{-1}, S_j B_j)$ sowohl gegen (A_0, B_0) als auch gegen $(S_0 A S_0^{-1}, S_0 B)$, also $((A, B), (A_0, B_0)) \in \text{Im}(G)$.

Es bleibt also nur noch die Behauptung zu zeigen.

Die Kerne $K_j := \text{Ker } R(A_j, B_j)$, $K := \text{Ker } R(A, B)$ sind $(nm - n)$ -dimensional und es gibt eine Folge von Monomorphismen $T_j, T: k^n \rightarrow k^{mn}$ mit direkten Summenzerlegungen

$$k^{mn} = K_j \oplus \text{Im}(T_j) = K \oplus \text{Im}(T),$$

so daß T_j in der Operatornorm Topologie gegen T konvergiert.

Setze: $S_0 := (R(A_0, B_0)T)(R(A, B)T)^{-1}$.

Wegen $\text{Ker } R(A, B) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$ ist S_0 wohldefiniert und invertierbar.

Also konvergiert die Folge

$$\begin{aligned} S_j &= S_j (R(A_j, B_j)T_j)(R(A_j, B_j)T_j)^{-1} \\ &= (R(S_j A_j S_j^{-1}, S_j B_j)T_j)(R(A_j, B_j)T_j)^{-1} \end{aligned}$$

gegen

$$S_0 = (R(A_0, B_0)T)(R(A, B)T)^{-1}.$$



Die Ähnlichkeitsaktion α induziert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$, per

$$(\bar{A}, \bar{B}) \sim (A, B) : \iff \text{Es gibt } S \in GL_n(k) \text{ mit } (\bar{A}, \bar{B}) = (SAS^{-1}, SB) .$$

Die entsprechenden Äquivalenzklassen $[A, B]$ von $\sim$ heißen Bahnen oder Orbits von α . Nach Lemma 1 sind diese Bahnen

$$[A, B] = \{ (SAS^{-1}, SB) \mid S \in GL_n(k) \} , \quad (A, B) \in \tilde{\Sigma}_{n,m}(k) ,$$

abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$.

Der Quotientenraum von $\sim$ heißt Orbit Raum von α und wird mit

$$\Sigma_{n,m}(k) := \tilde{\Sigma}_{n,m}(k) / GL_n(k)$$

bezeichnet. Wir versehen $\Sigma_{n,m}(k)$ mit der Quotiententopologie, das ist die feinste Topologie auf $\Sigma_{n,m}(k)$, so daß die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \pi : \tilde{\Sigma}_{n,m}(k) &\longrightarrow \Sigma_{n,m}(k) \\ (A, B) &\longmapsto [A, B] = \text{Orbit von } (A, B) \end{aligned}$$

stetig ist.

Konvention: Wir schreiben im folgenden $\tilde{\Sigma}_{n,m}$ bzw. $\Sigma_{n,m}$ für $\tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$ bzw. $\Sigma_{n,m}(k)$, wenn sowohl $k = \mathbb{R}$ als auch $k = \mathbb{C}$ gemeint ist. In den Fällen, in denen wir entsprechende Aussagen nur für $k = \mathbb{R}$ oder nur für $k = \mathbb{C}$ machen, heben wir die Abhängigkeit der Aussage vom Grundkörper k wieder besonders hervor.

Theorem 1

Es gibt eine eindeutig bestimmte analytische Struktur auf dem Orbit Raum $\Sigma_{n,m}$, so daß die zugrundeliegende Topologie die Quotiententopologie ist und $\pi: \tilde{\Sigma}_{n,m} \rightarrow \Sigma_{n,m}$ eine Submersion ist. Mit dieser Struktur ist der Orbit Raum der Ähnlichkeitsaktion eine analytische Mannigfaltigkeit ohne Rand und $\pi: \tilde{\Sigma}_{n,m} \rightarrow \Sigma_{n,m}$ ein $GL_n(k)$ -Hauptfaserbündel.

Beweis

Folgt mit Lemma 1 sofort aus Standardsätzen über Lie Gruppen Aktionen auf Mannigfaltigkeiten; siehe z.B. Dieudonné [20], 16.10.3, 16.14.1 .



Der Inhalt dieses Satzes ist inzwischen wohlbekannt in der "geometrischen (!) Kontrolltheorie", hauptsächlich durch grundlegende Arbeiten von Byrnes, Hurt, Hazewinkel und Kalman; [15], [11], [26], [30]. In ihren Arbeiten beweisen sie sogar die wesentlich schärfere Aussage, daß der Orbit Raum $\sum_{n,m}$ eine nicht-singuläre quasiprojektive Varietät ist; dies hatte Kalman schon zu Beginn der siebziger Jahre vermutet. Der erste Beweis [15] geht dabei unter Verwendung eines zentralen Ergebnisses der Mumford'schen "Geometrischen Invariantentheorie"; stattdessen kann man auch eine direkte Einbettung in einen projektiven Raum $P_N(k)$ angeben und algebraische Gleichungen und Ungleichungen, die den Orbit Raum $\sum_{n,m}(k)$ in $P_N(k)$ definieren [30]. Die kürzlich erschienene Darstellung von Tannenbaum [54] gibt eine Übersicht über diesen Problemkreis.

Nach Theorem 1 ist $\sum_{n,m}$ insbesondere ein Hausdorff Raum; darüber hinaus gilt:

Theorem 2

- a) $\dim_k \sum_{n,m} = nm$
- b) $\sum_{n,m}$ ist zusammenhängend
- c) $\sum_{n,m}$ ist nicht kompakt.

Beweis

- a) folgt daraus, daß jeder Orbit in $\tilde{\sum}_{n,m}$ Kodimension nm hat.
- b): Brockett [10] hat gezeigt, daß $\tilde{\sum}_{n,m}$ für $m \gg 2$ zusammenhängend ist. Also ist auch $\sum_{n,m} = \pi(\tilde{\sum}_{n,m})$ für $m \gg 2$ zusammenhängend. Andererseits ist für $m = 1$ die Abbildung

$$\tilde{t}: \tilde{\sum}_{n,1} \rightarrow GL_n(k) \times k^n, \quad \tilde{t}(A,b) := ((b, \dots, A^{n-1}b), c(A)),$$

mit $c(A) = -$ (Koeffizientenvektor des charakteristischen Polynoms v. A),
nach Lemma 2.2.3.6 ein Diffeomorphismus . Wegen $R(SAS^{-1}, Sb) = SR(A, b)$
und $c(SAS^{-1}) = c(A)$ induziert $\tilde{t}$ den analytischen Diffeomorphismus

$$t: \sum_{n,1} \longrightarrow k^n$$

$$[A, b] \longmapsto c(A) \quad .$$

Insbesondere ist $\sum_{n,1}$ zusammenhängend . ✓

c): Wir wollen dies hier nicht beweisen ; wir werden später einen
neuen und einheitlichen Beweis von b) und c) bringen , nachdem wir das
dazu nötige Instrumentarium eingeführt haben.

Bemerkung

Für $m = 1$ oder $n = 1$ gibt es analytische Diffeomorphismen

$$t: \sum_{n,1} \longrightarrow k^n \quad , \quad [A, b] \longmapsto c(A)$$

und

$$f: \sum_{1,m} \longrightarrow k \times P_{m-1}(k) \quad , \quad [A, b] \longmapsto (A, [b]) \quad .$$

In diesem Sinne kann man die Räume $\sum_{n,m}$ als Verallgemeinerung der
projektiven Räume auffassen . Sätze über die Topologie von $\sum_{n,m}$
sind damit auch Sätze über die Topologie der projektiven Räume .
Ein denkbarer , wenngleich auch an dieser Stelle noch spekulativ
erscheinender Weg ist daher vielleicht derjenige , systemtheore-
tische Intuition und Ergebnisse zu nutzen, um zu topologischen Aussagen
über $\sum_{n,m}$ (und daher auch über $P_{m-1}(k)$!) zu kommen.

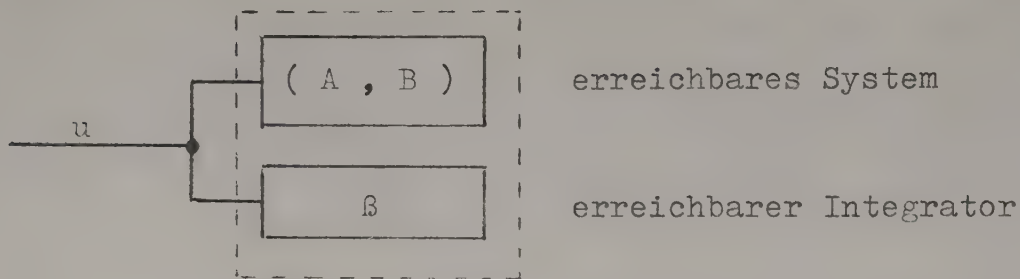
Den Ausgangspunkt zur Untersuchung der Räume $\sum_{n,m}$ bildete die Frage
von Hazewinkel und Kalman:

[Gibt es global definierte stetige kanonische Formen für die
Ähnlichkeitsaktion α ?

Dabei ist eine solche stetige kanonische Form nichts anderes als
ein stetiger Schnitt $s: \sum_{n,m} \longrightarrow \tilde{\sum}_{n,m}$ des Hauptfaserbündels

$\pi: \sum_{n,m}^{\sim} \rightarrow \sum_{n,m}$. Solche Schnitte existieren aber genau dann, wenn das Hauptfaserbündel selbst schon trivial ist. Hazewinkel und Kalman haben gezeigt [29], daß dies genau dann der Fall ist, wenn $m = 1$ ist. Diese Nichtexistenz stetiger kanonischer Formen von α für $m \geq 2$ haben sie durch ein relativ kompliziertes Gegenbeispiel beweisen können (Hazewinkel [26]). Es ist jedoch möglich, einen relativ elementaren und geometrisch instruktiven Beweis hiervon zu führen. Um dies zu tun, betrachten wir gewisse Einbettungen von Integratoren in dynamische Systeme.

Parallelschaltung mit einem erreichbaren Integrator:



Sei also für $1 \leq r \leq \min(n,m)$ das Paar $(A,B) \in \sum_{n-r,m}^{\sim}$ erreichbar mit $\det A \neq 0$. Wegen

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \\ B & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{rg} A(B, \dots, A^{n-2}B) + \operatorname{rg} B \\ &= n - r + \operatorname{rg} B \end{aligned}$$

ist dann für jede Matrix $B \in k^{r \times m}$ mit $\operatorname{rg} B = r$ das zusammengesetzte System

$$\tilde{i}(B) := \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \right) \in \sum_{n,m}^{\sim}.$$

Sei nun $G_{r,m}(k)$ die Grassmann Mannigfaltigkeit aller r -dimensionalen linearen Unterräume des k^m und $[B]$ der Zeilenraum der Matrix B .

Lemma 2 Sei $1 \leq r \leq \min(n,m)$. Dann ist

$$i: G_{r,m}(k) \rightarrow \sum_{n,m}, \quad [B] \mapsto \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} \right],$$

eine (analytische) Einbettung.

Beweis

Es reicht, die Injektivität von i zu zeigen. Seien also $\beta, \beta' \in V_{r,m}(k)$ $r \times m$ - Matrizen vom Rang r mit

$$\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ \beta \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ \beta \end{pmatrix} \right] .$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte invertierbare $n \times n$ - Matrix

$$\begin{matrix} n-r & \begin{bmatrix} U & V \\ W & X \end{bmatrix} \\ r & \\ n-r & r \end{matrix} \in GL_n(k)$$

mit

$$\begin{pmatrix} U & V \\ W & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ \beta' \end{pmatrix} .$$

D.h.:

$$U(AB, \dots, A^{n-1}B) = (AB, \dots, A^{n-1}B) ,$$

$$W(AB, \dots, A^{n-1}B) = 0$$

$$UB + V\beta = B \quad \text{und} \quad WB + X\beta = \beta' .$$

Daraus folgt aber $U = I$, $W = 0$, $V = 0$. Also $\beta' = X\beta$ mit $X \in GL_r(k)$.



Sei nun $V_{r,m}(k) = \{ \beta \in k^{r \times m} \mid \text{rg } \beta = r \}$ (für $r \leq m$) die Stiefel Mannigfaltigkeit aller r - Beine des k^m . Es ist wohlbekannt , daß das Hauptfaserbündel $p: V_{r,m}(k) \rightarrow G_{r,m}(k)$, $p(\beta) := [\beta]$, nicht trivial ist für alle $1 \leq r \leq m$. Nach Lemma 2 haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V_{r,m}(k) & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{\Sigma}_{n,m} \\ p \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\ G_{r,m}(k) & \xrightarrow{i} & \Sigma_{n,m} \end{array}$$

mit Einbettungen $\tilde{i}$, i .

Sei $m \geq 2$. Mit $\tilde{\Sigma}_{1,m} \cong k \times V_{1,m}(k)$ und $\Sigma_{1,m} \cong k \times G_{1,m}(k)$

ist $\tilde{\pi}(A, \beta) = (A, [\beta])$ und daher $\tilde{\pi}: \tilde{\Sigma}_{1,m} \rightarrow \Sigma_{1,m}$ nicht trivial .

Andererseits folgt für $m \geq 2$, $n \geq 2$ und $1 \leq r < \min(n, m)$ aus der Trivialität von $\pi: \tilde{\Sigma}_{n, m} \rightarrow \Sigma_{n, m}$ auch die Trivialität von $p: V_{r, m}(k) \rightarrow G_{r, m}(k)$ (siehe Anhang) und wir haben damit gezeigt:

Theorem 3 (Hazewinkel, Kalman; [29])

Für $m \geq 2$ ist das Bündel $\pi: \tilde{\Sigma}_{n, m}(k) \rightarrow \Sigma_{n, m}(k)$ nicht trivial.



Bemerkung

Sei $1 \leq r < \min(n, m)$. Wir sagen, daß das Bündel $\pi: \tilde{\Sigma}_{n, m} \rightarrow \Sigma_{n, m}$ das Bündel $p: V_{r, m}(k) \rightarrow G_{r, m}(k)$ enthält.

Für $r = 1$ und $m \geq 2$ enthält also $\pi: \tilde{\Sigma}_{n, m}(\mathbb{R}) \rightarrow \Sigma_{n, m}(\mathbb{R})$ das Möbius Bündel $S^1 \rightarrow P_1(\mathbb{R})$, $x \mapsto [x]$, und $\pi: \tilde{\Sigma}_{n, m}(\mathbb{C}) \rightarrow \Sigma_{n, m}(\mathbb{C})$ die

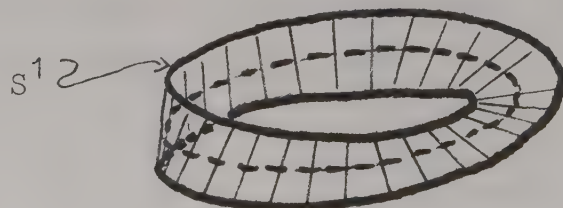
Hopf Faserung

$$\begin{aligned} f: S^3 &\longrightarrow S^2 = P_1(\mathbb{C}) \\ (z, w) &\longmapsto [z:w] \end{aligned} ,$$

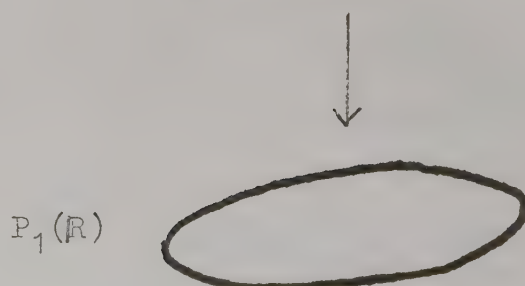
$z, w \in \mathbb{C}$, $|z|^2 + |w|^2 = 1$. In der Tat, durch Spezialisierung von i erhalten wir die Einbettung

$$\begin{aligned} j: P_1(k) &\longrightarrow \Sigma_{n, m}(k) \\ [\beta_1: \beta_2] &\longmapsto \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1, b_2, b_3, \dots, b_m \\ \beta_1, \beta_2, 0, \dots, 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} ,$$

die diese Bündel gerade induziert.



Möbius Bündel



Nach Theorem 1 ist der Orbit Raum $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$ eine komplexe Mannigfaltigkeit. Byrnes und Hurt [11], [15] haben untersucht, ob $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$ eine Stein Mannigfaltigkeit ist. Sie haben gezeigt, daß für $m > n$ dies nicht der Fall ist [11]. Da eine Stein Mannigfaltigkeit keine kompakten komplexen Untermannigfaltigkeiten positiver Dimension enthalten kann, folgt aus Lemma 2 das allgemeinere Ergebnis

Theorem 4

Für $m \geq 2$ ist $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$ keine Stein Mannigfaltigkeit.



Die Kalman Einbettung

Beim Beweis der Quasiprojektivität von $\sum_{n,m}$ haben Hazewinkel und Kalman [26], [29] eine bemerkenswerte Einbettung von $\sum_{n,m}$ in die Grassmann Mannigfaltigkeit $G_{n,(n+1)m(k)}$ konstruiert. Setzt man nämlich für jedes erreichbare Paar $(A,B) \in \sum_{n,m}$

$$R(A,B) := (B, AB, \dots, A^n B)$$

bzw.

$$R_H(A,B) := (b_1, \dots, A^n b_1, \dots, b_m, \dots, A^n b_m)$$

so erhalten wir äquivalente Einbettungen $R: \sum_{n,m} \xrightarrow{\sim} V_{n,(n+1)m(k)}$
 $(A,B) \mapsto R(A,B)$, bzw. $R_H: \sum_{n,m} \xrightarrow{\sim} V_{n,(n+1)m(k)}$, $(A,B) \mapsto R_H(A,B)$;
 [29]. Äquivalent heißt hierbei:

$$R(SA S^{-1}, SB) = SR(A,B) \quad \text{bzw.} \quad R_H(SA S^{-1}, SB) = SR_H(A,B).$$

Daraus folgt:

Theorem 5 ([15], [29]) Die Abbildungen

$$R: \sum_{n,m} \longrightarrow G_{n,(n+1)m(k)}, \quad [A,B] \mapsto \text{Zeilenraum von } R(A,B)$$

und

$$R_H: \sum_{n,m} \longrightarrow G_{n,(n+1)m(k)}, \quad [A,B] \mapsto \text{Zeilenraum von } R_H(A,B)$$

sind analytische Einbettungen der analytischen Mannigfaltigkeit $\sum_n$ in die Grassmann Mannigfaltigkeit.

Wir folgen Byrnes und Hurl[15] und nennen $R: \sum_{n,m} \rightarrow G_{n,(n+1)m}^{(k)}$ die Kalman Einbettung von $\sum_{n,m}$ in $G_{n,(n+1)m}^{(k)}$.

Byrnes und Hurl[15] haben eine interessante Interpretation der Kalman Einbettung angegeben, die wir der Vollständigkeit halber hier noch angeben wollen.

Wir betrachten dazu für natürliche Zahlen $n, m, p \geq 1$ die Klasse aller linearen erreichbaren Input - Output Systeme (A, B, C) gegeben durch die Differentialgleichungen

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

mit $x(t) \in k^n$, $u(t) \in k^m$, $y(t) \in k^p$, $A \in k^{n \times n}$, $B \in k^{n \times m}$, $C \in k^{p \times n}$ und (A, B) erreichbar. Wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{\sum}_{n,m,p} &:= \{ (A, B, C) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \times k^{p \times n} \mid (A, B) \text{ erreichbar} \} \\ &= \tilde{\sum}_{n,m} \times k^{p \times n}. \end{aligned}$$

$\tilde{\sum}_{n,m,p}$ ist eine offene (und dichte) Teilmenge von $k^{n \times n} \times k^{n \times m} \times k^{p \times n}$ und die Ähnlichkeitsaktion α auf $\tilde{\sum}_{n,m}$ setzt sich fort zu der Ähnlichkeitsaktion

$$\begin{aligned} \beta: GL_n(k) \times \tilde{\sum}_{n,m,p} &\rightarrow \tilde{\sum}_{n,m,p} \\ (S, A, B, C) &\longmapsto (SAS^{-1}, SB, CS^{-1}) \end{aligned}$$

auf $\sum_{n,m,p}$.

Sei $[A, B, C]$ der Orbit von β durch (A, B, C) und

$$\sum_{n,m,p} := \tilde{\sum}_{n,m,p} / GL_n(k)$$

der zugehörige Orbit Raum von β mit Quotientenabbildung

$$\begin{aligned} \hat{\pi}: \tilde{\sum}_{n,m,p} &\rightarrow \sum_{n,m,p} \\ (A, B, C) &\longmapsto [A, B, C]. \end{aligned}$$

Ganz analog zu Theorem 1 kann man zeigen

Theorem 6 ([15])

$\sum_{n,m,p}$ ist eine analytische Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim_k \sum_{n,m,p} = n(m+p)$ und $\hat{\pi} : \sum_{n,m,p} \rightarrow \sum_{n,m,p}$ ist ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe $GL_n(k)$. 

Sei $f: \sum_{n,m,p} \rightarrow \sum_{n,m}$, $[A,B,C] \mapsto [A,B]$ die Projektion auf $\sum_{n,m}$. f ist eine Submersion und mit den Definitionen

$$\begin{aligned} [A,B,C_1] + [A,B,C_2] &:= [A,B,C_1+C_2] \\ r[A,B,C] &:= [A,B,rC] \end{aligned}$$

sehen wir, daß (durch f) $\sum_{n,m,p}$ als Vektorraumbündel über $\sum_{n,m}$ aufgefaßt werden kann.

Daraus folgt sofort

Theorem 7

$\sum_{n,m}$ ist ein Deformationsretrakt von $\sum_{n,m,p}$ 

$\sum_{n,m,p}$ zerfällt in natürlicher Weise in die Summe von Teilbündeln

$$\sum_{n,m,p} = \underbrace{\sum_{n,m,1} \oplus \sum_{n,m,1} \oplus \dots \oplus \sum_{n,m,1}}_{n\text{-mal}}$$

Bemerkung [15]

Die Kalman Einbettung $R: \sum_{n,m} \rightarrow G_{n,(n+1)m}^{(k)}$ ist eine klassifizierende Abbildung für das n -Bündel $\sum_{n,m,1}$.

Beweis

Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $R([A,B])$. Dann ist durch

$$[A,B,(c^1, \dots, c^n)] \mapsto ([A,B], \sum_{i=1}^n c^i v_i)$$

ein Vektorraumbündel Isomorphismus von $\sum_{n,m,1}$ mit $R^!(U_{n,(n+1)m}) := R$ pull back des universellen n -Bündels $U_{n,(n+1)m}$ auf $G_{n,(n+1)m}^{(k)}$ gegeben. 

Nicht - Verschwinden der Kohomologie von $\sum_{n,m}(\mathbb{R})$

Byrnes und Hurt haben in [11] gezeigt, daß für $m > n$ der Orbit Raum $\sum_{n,m}(\mathbb{R})$ - in allen Graden bis $n(m-n)$ - nicht verschwindende mod 2 Kohomologiegruppen hat. Dies läßt sich verallgemeinern:

Theorem 8

Für alle $m, n \geq 1$ und $1 \leq r \leq \min(n,m)$ gibt es einen Epimorphismus $f : H^*(\sum_{n,m}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(G_{r,m}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$ der mod 2 Kohomologiegruppen von $\sum_{n,m}(\mathbb{R})$ auf die mod 2 Kohomologiegruppen der Grassmann Mannigfaltigkeit $G_{r,m}(\mathbb{R})$.

Beweis

Wir folgen im wesentlichen Byrnes und Hurt [11].

Sei $i: G_{r,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \sum_{n,m}(\mathbb{R})$ die Einbettung aus Lemma 2, R die Kalman Einbettung von $\sum_{n,m}(\mathbb{R})$. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_{r,m}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & \sum_{n,m}(\mathbb{R}) \\ & \searrow R \circ i & \downarrow R \\ & & G_{n,(n+1)m}(\mathbb{R}) \end{array}$$

induziert auf der Kohomologieebene das kommutative Diagramm von Gruppenhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} H^*(G_{r,m}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) & \xleftarrow{i^*} & H^*(\sum_{n,m}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \\ & \nwarrow (R \circ i)^* & \uparrow R^* \\ & & H^*(G_{n,(n+1)m}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

Wenn wir zeigen können, daß $(R \circ i)^*$ surjektiv ist, dann ist auch $f := i^*$ surjektiv.

Es ist wohlbekannt (Milnor/Stasheff [44]), daß die mod 2 Kohomologiegruppen der Grassmann Mannigfaltigkeiten gerade erzeugt werden von

den Stiefel - Whitney Klassen des universellen Vektorraumbündels der Grassmann Mannigfaltigkeit. Seien also $U_{r,m}$ bzw. $U_{n,(n+1)m}$ die universellen Bündel auf $G_{r,m}(\mathbb{R})$ bzw. $G_{n,(n+1)m}(\mathbb{R})$.

Wegen

$$\begin{aligned} (R \circ i)([\beta]) &= \text{Zeilenraum von } \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^n B \\ \beta & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{Zeilenraum von } (B, \dots, A^n B) \\ &\oplus \text{Zeilenraum von } (\beta, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

haben wir die Isomorphie der Vektorraumbündel

$$(R \circ i)^!(U_{n,(n+1)m}) \cong U_{r,m} \oplus (\text{triviales Bündel}) .$$

Also gilt für die Stiefel - Whitney Klassen

$$\begin{aligned} (R \circ i)^*(w_q(U_{n,(n+1)m})) &= w_q((R \circ i)^!(U_{n,(n+1)m})) \\ &= w_q(U_{r,m}) . \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß $(R \circ i)^*$ surjektiv ist .



3.2 Zellzerlegung des Orbit Raumes

In diesem Abschnitt werden zwei analytische zelluläre Zerlegungen von $\sum_{n,m}$ konstruiert . Dazu erinnern wir an die folgende Definition:

Definition

Eine Zerlegung $(X_i)_{i \in I}$ einer analytischen Mannigfaltigkeit X in disjunkte Teilmengen heißt eine analytische zelluläre Zerlegung , wenn

- (1) $(X_i)_{i \in I}$ ist lokal endlich und X_i eine analytische Untermannigfaltigkeit von X , analytisch diffeomorph zu einem $\mathbb{R}^{n_i}$,
- (2) Der Rand $\overline{X_i} - X_i$ von X_i in X ist Vereinigung von Zellen X_j mit $\dim_{\mathbb{R}} X_j < \dim_{\mathbb{R}} X_i$,
- (3) Der topologische Abschluß $\overline{X_i}$ von X_i in X ist eine analytische

Teilvarietät von X .

Dabei heißt eine Teilmenge A von X eine analytische Teilvarietät von X , wenn A abgeschlossen in X ist und es um jeden Punkt $a \in A$ eine Umgebung U von a in X gibt sowie endliche viele analytische Funktionen $f_1, \dots, f_s: U \rightarrow k$ mit

$$A \cap U = \bigcap_{j=1}^s f_j^{-1}(0) .$$

Zu jeder (analytischen) zellulären Zerlegung $(X_i)_{i \in I}$ von X heißt

$$i \leq j : \iff X_i \subset \overline{X_j}$$

die assozierte Halbordnung auf I oder auch Adhärenz Ordnung auf den Zellen X_i .

Beispiel: Schubert Zellen der Grassmann Mannigfaltigkeit

Für $1 \leq r < n$ sei $G_{r,n}(k)$ die Grassmann Mannigfaltigkeit aller r - dimensionalen linearen Unterräume des k^n .

Betrachte eine feste Fahne $0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = k^n$ des k^n mit $\dim F_i = i$.
Zu jeder Folge $a := (a_1, \dots, a_r)$ natürlicher Zahlen a_i mit

$$0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \leq n - r$$

heißt

$$S_0(a) := \left\{ X \in G_{r,n}(k) \mid \dim(X \cap F_{a_i+i}) = i, \dim(X \cap F_{a_i+i-1}) = i - 1 \right\} \\ \text{für } 1 \leq i \leq r$$

bzw.

$$S(a) := \left\{ X \in G_{r,n}(k) \mid \dim(X \cap F_{a_i+i}) \geq i \text{ für } i = 1, \dots, r \right\}$$

die Schubert Zelle bzw. Schubert Varietät zu a .

$S_0(a)$ ist eine Zelle , analytisch diffeomorph zu $k^{a_1 + \dots + a_r}$, und dicht in $S(a)$. Diese Zerlegung der Grassmann Mannigfaltigkeit in Schubert Zellen ist eine analytische zelluläre Zerlegung und

$S(a)$ eine irreduzible analytische Teilvarietät von $G_{r,n}(k)$; siehe Stoll [53] . Die Adhärenz Ordnung auf den Schubert Zellen $S_0(a)$ ist die Produktordnung

$$S_0(a) \subset \overline{S_0(b)} \iff a_1 \leq b_1, \dots, a_r \leq b_r ;$$

Stoll [53].

1. Kronecker Zellen und Kronecker Varietäten

Jedem erreichbaren System $(A,B) \in \tilde{\sum}_{n,m}$ ist durch das Streich - verfahren

$$b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_m \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1}b_1 \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1}b_m$$

eine Kombination $K(A,B) = K = (K_1, \dots, K_m)$ $K_{n,m}$ zugeordnet ; vgl. Kapitel 2 .

Diese Liste der Kronecker Indizes $K(A,B)$ von (A,B) ist eine Invariante der Ähnlichkeitsaktion :

$$K(SAS^{-1}, SB) = K(A,B) \text{ für alle } S \in GL_n(k) ;$$

Popov [47] oder Lemma 2.5.2.1 .

Die einzelnen Kronecker Strata Kro_K von $\tilde{\sum}_{n,m}$ sind daher invariant unter der Ähnlichkeitsaktion α . α induziert also eine freie Aktion $\alpha_K := \alpha|_{GL_n(k) \times Kro_K}$ auf Kro_K mit abgeschlossenem Graphen (vgl. 3.1)

Sei

$$\begin{aligned} \pi : \tilde{\sum}_{n,m} &\longrightarrow \sum_{n,m} \\ (A,B) &\longmapsto [A,B] = \text{Orbit von } (A,B) \end{aligned}$$

das Hauptfaserbündel auf $\sum_{n,m}$ und

$$\boxed{Kro(K) := \pi(Kro_K) = Kro_K / GL_n(k)}$$

der Orbit Raum der eingeschränkten Ähnlichkeitsaktion α_K auf Kro_K .

Dies gibt eine disjunkte Zerlegung $(Kro(K))_{K \in K_{n,m}}$ von $\sum_{n,m}$.

$Kro(K)$ heißt eine Kronecker Zelle und der topologische Abschluß $\overline{Kro(K)}$ von $Kro(K)$ in $\sum_{n,m}$ eine Kronecker Varietät.

Nach den obigen Bemerkungen zu α_K und Dieudonné, [20], 16.10.3, 16.14 ist $Kro(K)$ eine analytische Untermannigfaltigkeit von $\sum_{n,m}$ und

$$\begin{aligned} \pi_K : Kro_K &\longrightarrow Kro(K) \\ (A, B) &\mapsto [A, B] \end{aligned}$$

ein $GL_n(k)$ - Hauptfaserbündel.

Lemma 1 Sei $K \in K_{n,m}$ Kombination.

$Kro(K)$ ist eine analytische Zelle, d.h. eine analytische Untermannigfaltigkeit von $\sum_{n,m}$ die analytisch diffeomorph ist zu $k^{n(K)}$ mit

$$n(K) = \sum_{i,j=1}^m \min(K_i, K_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i K_{ij}, \quad K_{ij} := \begin{cases} 0 & K_i \geq K_j \\ 1 & K_i < K_j \end{cases}.$$

Beweis

Nach Lemma 2.2.3.5 ist die Kronecker Schicht Kro_K analytisch diffeomorph zu $GL_n(k) \times k^{n(K)}$ und nach Theorem 2.5.1 ist

$$n(K) = \sum_{i,j=1}^m \min(K_i, K_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^i K_{ij}, \quad K_{ij} = \begin{cases} 0 & K_i \geq K_j \\ 1 & K_i < K_j \end{cases}.$$

Dieser Diffeomorphismus läßt sich explizit angeben:

Sei $\leq$ die lexikographische Ordnung auf $\underline{n} \times \bar{m}$. Für jedes $1 \leq l \leq m$ und $(A, B) \in Kro_K$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $c_{ij}^l(A, B) \in k$ mit

$$A^{K_l} b_l = \sum_{\substack{(i,j) < (K_l, 1) \\ i < K_j}} c_{ij}^l(A, B) A^i b_j.$$

Ebenso gilt:

$$SA^{K_1} b_1 = \sum_{\substack{(i,j) < (K_1, 1) \\ i < K_j}} c_{ij}^1(SAS^{-1}, SB) SA^i b_j ,$$

also

$$c_{ij}^1(SAS^{-1}, SB) = c_{ij}^1(A, B) .$$

Wir schreiben die $n_1(K) = \text{card}\{(i,j) \in \underline{n} \times \bar{m} \mid i < K_j, (i,j) < (K_1, 1)\}$

Zahlen c_{ij}^1 als Komponenten eines Vektors $c_1 = c_1(A, B) \in k^{n_1(K)}$.

Nach Theorem 2.5.1 ist $n(K) = n_1(K) + \dots + n_m(K)$.

Setze

$$t: \text{Kro}_K(k) \rightarrow GL_n(k) \times k^{n(K)}$$

$$\begin{aligned} t(A, B) &:= (b_1, \dots, A^{K_1-1} b_1, \dots, b_m, \dots, A^{K_m-1} b_m, c_1(A, B), \dots, c_m(A, B)) \\ &= (R_K(A, B) , c_1(A, B), \dots, c_m(A, B)) . \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.2.1 und Theorem 2.2.2.1 ist dies gerade eine analytische Trivialisierung des Vektorraumbündels $\text{Kro}_K(k)$ über $GL_n(k)$. Insbesondere ist t ein analytischer Diffeomorphismus und wegen der Äquivarianz $t(SAS^{-1}, SB) = (SR_K(A, B), c_1(A, B), \dots, c_m(A, B))$ induziert t den analytischen Diffeomorphismus

$$\underline{t}: \text{Kro}(K) \rightarrow k^{n(K)}$$

$$[A, B] \mapsto (c_1(A, B), \dots, c_m(A, B)) .$$



Bemerkung Sei π die Hauptfaserbündel Abbildung $\sum_{n,m} \rightarrow \sum_{n,m}$,
 $K \in K_{n,m}$. Dann gilt:

$$\pi(\overline{\text{Kro}_K}) = \overline{\text{Kro}(K)} .$$

Beweis

Die Inklusionsrichtung " $\subset$ " ist klar wegen der Stetigkeit von π .

Sei $[A, B] \in \overline{\text{Kro}(K)}$ und $[A, B] = \lim_{\ell \rightarrow \infty} X_\ell$ für $X_\ell \in \text{Kro}(K)$. Sei U eine

offene Umgebung von $[A, B]$ in $\sum_{n,m}$ und $s: U \rightarrow \tilde{\sum}_{n,m}$ ein lokaler Schnitt von $\pi: \tilde{\sum}_{n,m} \rightarrow \sum_{n,m}$ mit $s([A, B]) = (A, B)$. Für hinreichend großes l ist dann $X_l \in U$ und wir setzen $(A_l, B_l) := s(X_l)$. Dann ist $(A_l, B_l) \in \text{Kro}_K$ und wegen der Stetigkeit von s konvergiert (A_l, B_l) gegen (A, B) . Also $(A, B) \in \overline{\text{Kro}_K}$ und $[A, B] = \pi(A, B) \in \pi(\overline{\text{Kro}_K})$. Also ist $\overline{\text{Kro}(K)}$ enthalten in $\pi(\overline{\text{Kro}_K})$.



Lemma 2 Sei $K \in K_{n,m}$ Kombination.

$\overline{\text{Kro}(K)}$ ist eine analytische Teilvarietät von $\sum_{n,m}$.

Beweis

Nach Theorem 2.5.4.7 ist $\overline{\text{Kro}_K}$ eine analytische Teilvarietät von $\tilde{\sum}_{n,m}$. Sei $[A, B] \in \overline{\text{Kro}(K)}$, U eine Umgebung von $[A, B]$ in $\sum_{n,m}$ und $s: U \rightarrow \tilde{\sum}_{n,m}$ ein lokaler analytischer Schnitt von π , $s([A, B]) = (A, B)$. Nach der Bemerkung ist $(A, B) \in \overline{\text{Kro}_K}$. Es gibt Umgebung $V \subset \tilde{\sum}_{n,m}$ von (A, B) und analytische Funktionen $f_i: V \rightarrow k$, $i = 1, \dots, \ell$, mit

$$V \cap \overline{\text{Kro}_K} = \bigcap_{i=1}^{\ell} f_i^{-1}(0).$$

Nach eventueller Verkleinerung von U können wir $s(U) \subset V$ annehmen.

Dann sind $g_i = f_i \circ s: U \rightarrow k$ analytische Funktionen mit

$$U \cap \overline{\text{Kro}(K)} = \bigcap_{i=1}^{\ell} g_i^{-1}(0).$$



Nach der Bemerkung und der offenbaren Beziehung

$$\pi^{-1}(\text{Kro}(K)) = \text{Kro}_K$$

folgt aus Theorem 2.5.4.6 ein entsprechender Satz über die Anordnung der Kronecker Zellen:

Lemma 3 Seien $K, L \in K_{n,m}$ und $\ll$ die Kronecker Ordnung auf $K_{n,m}$.
Dann ist

$$\text{Kro}(K) \subset \overline{\text{Kro}(L)} \iff \text{Kro}(K) \cap \overline{\text{Kro}(L)} \neq \emptyset \iff K \ll L.$$



Wir zeigen jetzt, daß die durch die Kronecker Zellen definierte Zellstruktur auf $\sum_{n,m}$ von der Schubert Zellzerlegung der Grassmann Mannigfaltigkeit $G_{n,(n+1)m}(k)$ induziert wird.

Sei dazu e_i , $i = 1, \dots, (n+1)m$, die Standardbasisvektoren des $k^{(n+1)m}$ und $0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{(n+1)m} = k^{(n+1)m}$ die durch

$$F_i := \text{Span} \{ e_{(n+1)m}, \dots, e_{(n+1)m - i + 1} \}$$

definierte Fahne des $k^{(n+1)m}$.

Sei $K \in K_{n,m}$ eine Kombination von n und $p(K) = (p_1, \dots, p_n)$ die Position von K (siehe 2.5.3). $p(K)$ gibt also im Young Diagramm von K - bezüglich der lexikographischen Ordnung - die Position der besetzten Blöcke an, so daß $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$.

Sei $z: \mathbb{Z} \times \bar{m} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(i, j) \mapsto im + j$, die Zählfunktion und

$$z_t := z(p_t) \quad \text{für } t = 1, \dots, n.$$

Ist $p_t = (i_t, j_t)$, so ist also $z_t = mi_t + j_t$.

Setze $u(K) = (u_1, \dots, u_n) := (z_n, \dots, z_1)$. $u(K)$ ist also eine Umordnung von $(z(p_1), \dots, z(p_n))$ und es gilt

$$u_1 \geq \dots \geq u_n.$$

Jeder Kombination $K \in K_{n,m}$ ordnen wir das n -Tupel $a_K := (a_1, \dots, a_n)$ zu mit

$$a_i := (n+1)m - u_i - i + 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Dann ist

$$0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq (n+1)m - n$$

Lemma 4 Seien $K, L \in K_{n,m}$ Kombinationen, $\leq$ Kronecker Ordnung.

$$1) a_K = a_L \iff K = L.$$

$$2) K \leq L \iff a_1(K) \leq a_1(L), \dots, a_n(K) \leq a_n(L).$$

Beweis

ad 1): a_K ist eindeutig bestimmt durch $u(K)$, also eindeutig bestimmt durch $p(K)$, was wiederum durch K eindeutig bestimmt ist.

ad 2):

$$\begin{aligned} a_i(K) \leq a_i(L) \text{ für } 1 \leq i \leq n &\iff u_i(K) \geq u_i(L) \text{ für } 1 \leq i \leq n \\ &\iff z_i(K) \geq z_i(L) \text{ für } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.5.3.6 ist dies aber äquivalent zu $K \leq L$.



Sei $R: \sum_{n,m} \rightarrow G_{n,(n+1)m}(k)$ die Kalman Einbettung von $\sum_{n,m}$; siehe 3.1; $S_K := S_0(a_K)$ sei die Schubert Zelle von $G_{n,(n+1)m}(k)$ zu a_K , für $K \in K_{n,m}$ eine Kombination von n .

Theorem 1 Sei $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq (n+1)m - n$, $a := (a_1, \dots, a_n)$.

$$(1) R^{-1}(S_0(a)) \neq \emptyset \iff a = a_K \text{ für eine Kombination } K \in K_{n,m}.$$

$$(2) \text{Kro}(K) = R^{-1}(S_K) \text{ für alle } K \in K_{n,m}.$$

$$(3) \overline{\text{Kro}(K)} = R^{-1}(\overline{S_K}) \text{ für alle } K \in K_{n,m}.$$

Beweis

Sei $[A, B] \in \sum_{n,m}$ und $R([A, B]) \in S_0(a)$. Seien $K = (K_1, \dots, K_m)$ die Kronecker Indizes von (A, B) . Setze $R := R([A, B])$ und

$$(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) := a_K.$$

Die a_K 's sind nun gerade so definiert, daß gilt:

$$\dim(R \cap F_{\tilde{a}_i+i}) = i, \dim(R \cap F_{\tilde{a}_i+i-1}) = i-1 \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Daher ist $R \in S_0(a) \cap S_0(a_K)$, also $S_0(a) \cap S_0(a_K) \neq \emptyset$, d.h. $a = a_K$.

Dies Argument zeigt insbesondere auch $\text{Kro}(K) \subset R^{-1}(S_K)$.

Sei $\text{Kro}(K') \cap R^{-1}(S_K) \neq \emptyset$. Dann folgt $S_{K'} \cap S_K \neq \emptyset$, also $a_{K'} = a_K$ und daher $K' = K$. Daraus folgt $\text{Kro}(K) = R^{-1}(S_K)$ und wir haben (1) und (2) bewiesen.

ad(3): Für zwei n -Tupel natürlicher Zahlen $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ setzen wir

$$a \leq b : \Longleftrightarrow a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n.$$

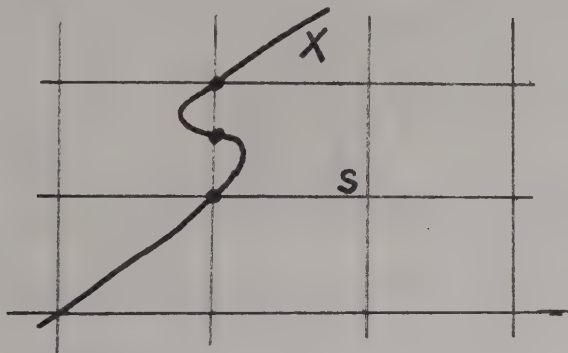
Dann gilt mit Lemma 4 :

$$\begin{aligned} R^{-1}(\overline{S_K}) &= \bigcup_{a \leq a_K} R^{-1}(S_0(a)) = \bigcup_{a_L \leq a_K} R^{-1}(S_0(a_L)) \\ &= \bigcup_{L \leq K} R^{-1}(S_L) = \bigcup_{L \leq K} \text{Kro}(L) \\ &= \overline{\text{Kro}(K)} \quad \text{nach Lemma 3.} \end{aligned}$$



Bemerkung

(3) folgt im allgemeinen nicht aus (2). Die Schwierigkeit sei an einem Beispiel illustriert:



S offene Zelle

$$\overline{S} \cap X \neq \overline{S \cap X} \cap X.$$

CW - Komplex

(3) gibt übrigens einen weiteren Beweis von Lemma 2.

Wir fassen jetzt die bisher erzielten Ergebnisse zusammen und formulieren das Hauptergebnis dieses Abschnittes.

Theorem 2

Die Zerlegung des Orbit Raumes $\sum_{n,m}$ in Kronecker Zellen $\text{Kro}(K)$, $K \in K_{n,m}$, ist eine endliche analytische zelluläre Zerlegung.
Die assoziierte Ordnung auf $K_{n,m}$ ist die Kronecker Ordnung.



2. Hermite Zellen und Hermite Varietäten

Wir formulieren hier für die Hermite Indizes analoge Aussagen zu denen in 3.2.1; mit dem Unterschied, daß die Hermite Zellen nur für $k = \mathbb{C}$ eine zelluläre Zerlegung des Orbit Raumes definieren.

Nach Kapitel 2 ist jedem erreichbaren System $(A, B) \in \tilde{\sum}_{n,m}(k)$ durch das Streichverfahren

$$b_1 \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1}b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_m \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1}b_m$$

eine Kombination $K(A, B) = K = (K_1, \dots, K_m) \in K_{n,m}$ zugeordnet.

Diese Liste der Hermite Indizes $K(A, B)$ von (A, B) ist invariant unter der Ähnlichkeitsaktion α :

$$K(SAS^{-1}, SB) = K(A, B) \quad \text{für alle } S \in GL_n(k);$$

Mayne [42], Hinrichsen & Prätzel - Wolters [35] (Beweis ist trivial).

Damit sind die einzelnen Hermite Schichten $\text{Her}_K(k)$ von $\tilde{\sum}_{n,m}(k)$ invariant unter α und α induziert nach Lemma 3.1.1 eine freie Aktion $\alpha_K := \alpha|_{GL_n(k) \times \text{Her}_K(k)}$ auf $\text{Her}_K(k)$ mit abgeschlossenem Graphen.

Sei

$$H_K(k) := \pi(\text{Her}_K(k)) = \text{Her}_K(k)/GL_n(k)$$

der Orbit Raum der eingeschränkten Ähnlichkeitsaktion α_K auf $\text{Her}_K(k)$. Dies gibt eine disjunkte Zerlegung $(H_K(k))_{K \in K_{n,m}}$ von $\sum_{n,m}(k)$.

$H_K(k)$ heißt eine Hermite Zelle von $\sum_{n,m}(k)$ und der topologische Abschluß $\overline{H_K(k)}$ von $H_K(k)$ in $\sum_{n,m}(k)$ eine Hermite Varietät.

Wie in 3.2.1 folgt aus den obigen Bemerkungen zu α_K und Dieudonné [20], 16.10.3, 16.14.1, daß $H_K(k)$ eine analytische Untermannigfaltigkeit von $\sum_{n,m}(k)$ ist und

$$\begin{aligned}\pi_K : \text{Her}_K(k) &\rightarrow H_K(k) \\ (A, B) &\mapsto [A, B]\end{aligned}$$

ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe $GL_n(k)$.

Da α_K frei auf $\text{Her}_K(k)$ operiert, gilt nach Theorem 2.4.1 die Dimensionsformel

$$\begin{aligned}N(K) &:= \dim_k H_K(k) = \dim_k \text{Her}_K(k) - n^2 \\ &= \sum_{i=1}^m (m - i + 1) K_i.\end{aligned}$$

Lemma 5 Sei $K \in K_{n,m}$ eine Kombination.

$H_K(k)$ ist eine analytische Zelle, d.h. eine analytische Untermannigfaltigkeit von $\sum_{n,m}(k)$ die analytisch diffeomorph ist zu $k^{N(K)}$.

Beweis

Der Beweis von Lemma 3.2.1.1 für die Kronecker Zellen überträgt sich wörtlich auf die Hermite Zellen $H_K(k)$; man muß nur $n(K)$ durch $N(K)$ (und die entsprechende Formel), die lexikographische Ordnung durch die Hermite Ordnung auf $\underline{n} \times \overline{m}$ und Kro_K durch $\text{Her}_K(k)$ ersetzen.



Ebenfalls überträgt sich die Lemma 3.2.1.1 folgende Bemerkung auf die Hermite Zellen bzw. Varietäten; im Beweis ist ja gar nicht auf die spezifische Definition der Kronecker Schichten Bezug genommen. Also gilt auch

Bemerkung Sei π die Hauptfaserbündel Abbildung $\tilde{\Sigma}_{n,m}^{(k)} \rightarrow \Sigma_{n,m}^{(k)}$ und $K \in K_{n,m}$. Dann gilt:

$$\pi(\overline{\text{Her}_K(k)}) = \overline{H_K(k)}.$$



Lemma 6 Sei $K \in K_{n,m}$ Kombination.

$\overline{H_K(\mathbb{C})}$ ist eine komplex analytische Teilvarietät von $\Sigma_{n,m}(\mathbb{C})$.

Beweis

Nach Theorem 2.4.1 ist der topologische Abschluß $\overline{\text{Her}_K(\mathbb{C})}$ der komplexen Hermite Schicht $\text{Her}_K(\mathbb{C})$ in $\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{C})$ eine komplex analytische Teilvarietät von $\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{C})$. Sei $[A, B] \in \overline{H_K(\mathbb{C})}$, U eine Umgebung von $[A, B]$ in $\Sigma_{n,m}(\mathbb{C})$ und $s: U \rightarrow \tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{C})$ ein komplex analytischer Schnitt von π mit $s([A, B]) = (A, B)$. Dann ist $(A, B) \in \overline{\text{Her}_K(\mathbb{C})}$ und es gibt Umgebung $V \subset \tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{C})$ von (A, B) sowie analytische Funktionen $f_i: V \rightarrow k$, $i = 1, \dots, l$, mit

$$V \cap \overline{\text{Her}_K(\mathbb{C})} = \bigcap_{i=1}^l f_i^{-1}(0).$$

Nach eventueller Verkleinerung von U können wir $s(U) \subset V$ annehmen. Dann sind $g_i := f_i \circ s: U \rightarrow k$, $i = 1, \dots, l$, analytische Funktionen mit

$$U \cap \overline{H_K(\mathbb{C})} = \bigcap_{i=1}^l g_i^{-1}(0).$$



Lemma 6 gilt allgemein nur für $k = \mathbb{C}$. Andernfalls wäre ja auch $\overline{\text{Her}_K(\mathbb{R})} = \pi^{-1}(\overline{H_K(\mathbb{R})})$ analytisch in $\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})$; wir haben aber in Lemma 2.4.1 bewiesen, daß dies schon für $m = n = 2$ im allgemeinen nicht der Fall ist.

Die reellen Hermite Varietäten $\overline{H_K(\mathbb{R})}$ sind also nur in Ausnahmefällen analytische Teilvarietäten von $\Sigma_{n,m}(\mathbb{R})$.

Lemma 7 Seien $K, L \in K_{n,m}$ und $\leq$ die Dominanz Ordnung auf $K_{n,m}$.
Dann gilt:

$$H_K(\mathbb{C}) \subset \overline{H_L(\mathbb{C})} \iff H_K(\mathbb{C}) \cap \overline{H_L(\mathbb{C})} \neq \emptyset \iff K \leq L.$$

Beweis

Unter Berücksichtigung der offenbaren Gleichheit

$$\kappa^{-1}(H_K(k)) = \text{Her}_K(k)$$

folgt Lemma 7 unmittelbar aus Theorem 2.4.3.2 und der obigen Bemerkung



Für den Körper $k = \mathbb{R}$ ist Lemma 7 falsch! Denn aus der Gültigkeit von

$$H_K(\mathbb{R}) \subset \overline{H_L(\mathbb{R})} \iff H_K(\mathbb{R}) \cap \overline{H_L(\mathbb{R})} \neq \emptyset \iff K \leq L$$

folgt auch die entsprechende Beziehung für die Hermite Schichten $\text{Her}_K(\mathbb{R})$, $\text{Her}_L(\mathbb{R})$; wir hatten aber schon in 2.4.3 festgestellt, daß dies nicht stimmt.

Wir zeigen jetzt ebenfalls wie in 3.2.1, daß - für $k = \mathbb{C}$ - die durch die Hermite Zellen definierte Zellstruktur auf $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$ von der Schubert Zellzerlegung der Grassmann Mannigfaltigkeit $G_{n,(n+1)m}(\mathbb{C})$ induziert wird.

Sei dazu $\{e_i \mid i = 1, \dots, (n+1)m\}$ die Standardbasis des $\mathbb{C}^{(n+1)m}$ und $0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{(n+1)m} = \mathbb{C}^{(n+1)m}$ die durch

$$F_i := \text{Span}_{\mathbb{C}} \{e_{(n+1)m}, \dots, e_{(n+1)m - i + 1}\}$$

definierte Fahne des $\mathbb{C}^{(n+1)m}$.

Jeder Kombination $K = (K_1, \dots, K_m) \in K_{n,m}$ ordnen wir das eindeutig durch K bestimmt n -Tupel natürlicher Zahlen $a_K := (a_1, \dots, a_n)$ zu mit

$a_K :=$

$$\underbrace{(n+1-K_m, \dots, n+1-K_m)}_{K_m}, \underbrace{2(n+1)-K_m-K_{m-1}, \dots, 2(n+1)-K_m-K_{m-1}}_{K_{m-1}}, \dots, \underbrace{nm+m-n, \dots, nm+m-n}_{K_1}$$

Die folgende Bemerkung ist klar:

Bemerkung Seien $K, L \in K_{n,m}$.

1) $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq (n+1)m - n$.

2) $a_K = a_L \iff K = L$.



Sei $K \leq L$ die Ordnung durch Dominanz und $a \leq b$ die Produktordnung

$$(a_1, \dots, a_n) \leq (b_1, \dots, b_n) \iff a_i \leq b_i \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Lemma 8 $K, L \in K_{n,m}$ seien Kombinationen.

$$K \leq L \iff a_K \leq a_L.$$

Beweis

Sei $a_K = (a_1, \dots, a_n)$ und $a_L = (a'_1, \dots, a'_n)$. Wir setzen

$$b_K := (b_1, \dots, b_n) := (a_n, \dots, a_1)$$

$$b_L := (b'_1, \dots, b'_n) := (a'_n, \dots, a'_1).$$

Dann ist

$$b_K = (\underbrace{u_1, \dots, u_1}_{K_1}, \dots, \underbrace{u_m, \dots, u_m}_{K_m})$$

und

$$b_L = (\underbrace{v_1, \dots, v_1}_{L_1}, \dots, \underbrace{v_m, \dots, v_m}_{L_m})$$

mit

$$u_i = (n+1)(m-i+1) - (K_i + \dots + K_m)$$

$$= (n+1)(m-i+1) - n + (K_1 + \dots + K_{i-1}) \text{ für } i = 1, \dots, m$$

und

$$v_i = (n+1)(m-i+1) - n + (L_1 + \dots + L_{i-1}) \text{ für } i = 1, \dots, m.$$

Es ist $u_1 \geq \dots \geq u_m$ und $v_1 \geq \dots \geq v_m$; ferner ist $K \leq L$ genau dann, wenn $u_i \leq v_i$ für alle $i = 1, \dots, m$.

Sei $K \leq L$. Zu jedem $1 \leq r \leq n$ gibt es ein $1 \leq l \leq m$ mit $b_r = u_l$. Wegen

$$K_1 + \dots + K_l \leq L_1 + \dots + L_l$$

ist dann $b'_r = v_{l'}$ für ein $l' \leq l$. Daraus folgt

$$b_r = u_l \leq u_{l'} \leq v_{l'} = b'_r.$$

Da r beliebig war, ist also $b_K \leq b_L$, d.h. $a_K \leq a_L$.

Sei nun $a_K \leq a_L$ und $m - l + 1, l \geq 1$, der erste Index mit

$$r := L_m + \dots + L_{m-l+1} > K_m + \dots + K_{m-l+1}$$

(oder äquivalent $K_1 + \dots + K_{m-l} > L_1 + \dots + L_{m-l}$). Da $m - l + 1$ der erste Index ist, folgt $L_{m-l+1} \geq 1$. Wegen der Monotonie der Folge $a_K = (a_1, \dots, a_n)$ ist

$$\begin{aligned} a_r &\geq 1(n+1) - (K_m + \dots + K_{m-l+1}) > \\ &> 1(n+1) - (L_m + \dots + L_{m-l+1}) = a'_r. \quad \text{Widerspruch.} \end{aligned}$$



Zur Kombination $K \in K_{n,m}$ sei $S_K := S_O(a_K)$ die Schubert Zelle bzw.

$\overline{S}_K := S(a_K)$ die Schubert Varietät zu a_K in $G_{n,(n+1)m}(\mathbb{C})$. Sei

$$R_H: \sum_{n,m}(\mathbb{C}) \longrightarrow G_{n,(n+1)m}(\mathbb{C})$$

$$[A, B] \mapsto \text{Zeilenraum von } (b_1, \dots, A^{n_1} b_1, \dots, b_m, \dots, A^{n_m} b_m)$$

die modifizierte Kalman Einbettung von $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$ in $G_{n,(n+1)m}(\mathbb{C})$; vgl. 3.1.

Theorem 3 Sei $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq (n+1)m - n$, $a := (a_1, \dots, a_n)$.

(1) $R_H^{-1}(S_O(a)) \neq \emptyset \iff a = a_K$ für eine Kombination $K \in K_{n,m}$.

(2) $H_K(\mathbb{C}) = R_H^{-1}(S_K)$ für alle $K \in K_{n,m}$.

(3) $\overline{H}_K(\mathbb{C}) = R_H^{-1}(\overline{S}_K)$ für alle $K \in K_{n,m}$.

Beweis

Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis von Theorem 1. Sei

also $[A, B] \in \sum_{n,m}(\mathbb{C})$ der Orbit von (A, B) mit $R_H([A, B]) \in S_O(a)$.

Seien $K = (K_1, \dots, K_m)$ die Hermite Indizes von (A, B) . Der Zeilenraum $R := R_H([A, B])$ ist von n linear unabhängigen Vektoren des $\mathbb{C}^{(n+1)m}$ erzeugt, mit der Gestalt

Sei $(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) := a_K$. Dann liest man an der obigen Matrix ohne Schwierigkeiten die Beziehungen ab

$$\dim (R \cap F_{\tilde{a}_i+i}) = i, \quad \dim (R \cap F_{\tilde{a}_i+i-1}) = i-1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Daher $R \in S_0(a) \cap S_0(a_K) \neq \emptyset$, d.h. $a = a_K$.

Dies zeigt auch $H_K(\mathbb{C}) \subset R_H^{-1}(S_K)$. Ist nun $H_L(\mathbb{C}) \cap R_H^{-1}(S_K) \neq \emptyset$ für $L \in K_{n,m}$, dann ist $S_L \cap S_K \neq \emptyset$, d.h. $a_L = a_K$, also $K = L$. Daraus folgt $H_K(\mathbb{C}) = R_H^{-1}(S_K)$.

Nach Lemma 7, Lemma 8 gilt

$$\begin{aligned}
 R_H^{-1}(\overline{S_K}) &= \bigcup_{a \leq a_K} R_H^{-1}(S_O(a)) \stackrel{(1)}{=} \bigcup_{a_L \leq a_K} R_H^{-1}(S_O(a_L)) \\
 &= \bigcup_{L \leq K} R_H^{-1}(S_L) = \bigcup_{L \leq K} H_L(\mathbb{C}) = \overline{H_L(\mathbb{C})} .
 \end{aligned}$$



Durch Zusammenfassung der erzielten Ergebnisse dieses Abschnittes erhalten wir

Theorem 4 [32]

Die Zerlegung des Orbit Raumes $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$ in die komplexen Hermite Zellen $H_K(\mathbb{C})$, $K \in K_{n,m}$, ist eine endliche analytische zelluläre Zerlegung von $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$. Die zugehörige Adhärenz Ordnung ist die Dominanz Ordnung auf $K_{n,m}$.



Zum Abschluß dieses Abschnittes geben wir noch den versprochenen Beweis von Theorem 3.1.2 b),c). Aus Theorem 3.2.2 und der Definition der Kronecker Ordnung $\leq$ auf $K_{n,m}$ (siehe 2.5.3) folgt leicht, daß es eine eindeutig bestimmte Kronecker Zelle $Kro(K_0)$ (mit $K_0 = (0, \dots, 0, n)$) minimaler Dimension und eine eindeutig bestimmte Kronecker Zelle $Kro(K_1)$ maximaler Dimension (die generische Kronecker Liste K_1) in $\sum_{n,m}(k)$ gibt. Daraus folgt aber:

(i) $Kro(K_1)$ ist dicht in $\sum_{n,m}(k)$.

(ii) $Kro(K_0) = \overline{Kro(K_0)}$ ist abgeschlossen in $\sum_{n,m}(k)$.

Da $Kro(K_1)$ zusammenhängend ist, ist daher auch $\sum_{n,m}(k) = \overline{Kro(K_1)}$ zusammenhängend. Wäre $\sum_{n,m}(k)$ kompakt, dann wäre auch nach (ii) $Kro(K_0) = k^n$ kompakt. Widerspruch wegen $n \geq 1$.



3.3 Die Homologiegruppen von $\sum_{n,m}$

In diesem Abschnitt werden die singulären Homologiegruppen des Orbit Raumes $\sum_{n,m}(k)$ berechnet .

Für jede natürliche Zahl $q \geq 0$ sei

$$\begin{aligned} b_q^{\mathbb{R}}(n,m) &:= \text{Anzahl der } K \in K_{n,m} \text{ mit } \dim_{\mathbb{R}} \text{Kro}(K;\mathbb{R}) = nm - q , \\ b_q^{\mathbb{C}}(n,m) &:= \text{Anzahl der } K \in K_{n,m} \text{ mit } \dim_{\mathbb{R}} \text{Kro}(K;\mathbb{C}) = 2nm - q \end{aligned}$$

die Anzahl der Kronecker Zellen $\text{Kro}(K;k)$ von $\sum_{n,m}(k)$ der reellen Kodimension q und

$$\begin{aligned} \beta_q^{\mathbb{R}}(n,m) &:= \text{Anzahl der } K \in K_{n,m} \text{ mit } \dim_{\mathbb{R}} H_K(\mathbb{R}) = nm - q , \\ \beta_q^{\mathbb{C}}(n,m) &:= \text{Anzahl der } K \in K_{n,m} \text{ mit } \dim_{\mathbb{R}} H_K(\mathbb{C}) = 2nm - q \end{aligned}$$

die Anzahl der Hermite Zellen $H_K(k)$ von $\sum_{n,m}(k)$ der reellen Kodimension q .

Nach Lemma 3.2.1.1 bzw. Lemma 3.2.2.5 ist

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Kro}(K;\mathbb{C}) = 2 \dim_{\mathbb{R}} \text{Kro}(K;\mathbb{R}) ,$$

$$\dim_{\mathbb{R}} H_K(\mathbb{C}) = 2 \dim_{\mathbb{R}} H_K(\mathbb{R}) .$$

Daher ist für alle $q \geq 0$:

$$\begin{aligned} (1) \quad b_{2q}^{\mathbb{C}}(n,m) &= b_q^{\mathbb{R}}(n,m) , \\ (2) \quad b_{2q+1}^{\mathbb{C}}(n,m) &= 0 , \\ (3) \quad \beta_{2q}^{\mathbb{C}}(n,m) &= \beta_q^{\mathbb{R}}(n,m) , \\ (4) \quad \beta_{2q+1}^{\mathbb{C}}(n,m) &= 0 . \end{aligned}$$

Lemma 1 Sei $q \geq 0$ natürliche Zahl .

$\beta_q^{\mathbb{C}}(n,m)$ ist gleich der Anzahl aller Folgen $(a_1, \dots, a_{m-1})$ nicht - negativer natürlicher Zahlen mit $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{m-1} \leq n$ und $2(a_1 + \dots + a_{m-1}) = 2n(m-1) - q$.

Beweis

Sei $L_{n,m} := \{(a_1, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{Z}^{m-1} \mid 0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{m-1} \leq n\}$ und

$l_q(n,m) := \text{card} \{(a_1, \dots, a_{m-1}) \in L_{n,m} \mid 2(a_1 + \dots + a_{m-1}) = 2n(m-1) - q\}$

Die Abbildung

$$f: K_{n,m} \longrightarrow L_{n,m}$$

$$(K_1, \dots, K_m) \mapsto (K_1, K_1 + K_2, \dots, K_1 + \dots + K_{m-1})$$

ist bijektiv mit

$$K_1 + (K_1 + K_2) + \dots + (K_1 + \dots + K_{m-1}) = \sum_{i=1}^m (m-i)K_i.$$

Daher ist $l_q(n,m)$ gleich der Anzahl aller Kombinationen $K \in K_{n,m}$ mit

$$2 \sum_{i=1}^m (m-i+1)K_i = 2nm - q,$$

nach Lemma 3.2.2.5 also gleich $\beta_q^{\mathbb{C}}(n,m)$.



Sei $H_q(X; \mathbb{Z})$ bzw. $H_q(X; \mathbb{Z}_2)$ die q -te singuläre Homologiegruppe eines topologischen Raumes X mit Koeffizientenbereich $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}_2$; vgl. z.B. Massey [41].

Theorem 1 [32]

Die singulären Homologiegruppen von $\Sigma_{n,m}(\mathbb{C})$ sind isomorph zu denen der komplexen Grassmann Mannigfaltigkeit $G_{n,n+m-1}(\mathbb{C})$:

$$H_q(\Sigma_{n,m}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) = H_q(G_{n,n+m-1}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \quad \text{für alle } q \geq 0;$$

insbesondere ist die q -te Betti Zahl $\beta_q(\Sigma_{n,m}(\mathbb{C}))$ von $\Sigma_{n,m}(\mathbb{C})$ gleich $\beta_q^{\mathbb{C}}(n,m)$.

Beweis

Da $G_{n,n+m-1}(\mathbb{C})$ diffeomorph ist zu $G_{m-1,n+m-1}(\mathbb{C})$, ist für alle $q \geq 0$ auch $H_q(G_{n,n+m-1}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ isomorph zu $H_q(G_{m-1,n+m-1}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$.

Die Schubert Zellen $S_0(a)$ von $G_{m-1,n+m-1}(\mathbb{C})$ der reellen Kodimension q sind charakterisiert durch die Beziehungen (Milnor&Stasheff[44]):

$$0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{m-1} \leq n$$

und

$$2(a_1 + \dots + a_{m-1}) = 2n(m-1) - q.$$

Sei $l_q(n,m)$ die Anzahl dieser Folgen $(a_1, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{Z}^{m-1}$. Die Homologiegruppen von $G_{m-1,n+m-1}(\mathbb{C})$ sind wohlbekannt (siehe z.B. Milnor&Stasheff[44]) und für alle $q \geq 0$ ist

$$H_q(G_{m-1,n+m-1}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{l_q(n,m)} := \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{l_q(n,m)}.$$

Nach Theorem 3.2.2.4 und der Formel (4) bilden die Hermite Zellen $H_K(\mathbb{C})$ eine endliche zelluläre Zerlegung von $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$ in Zellen gerader Dimension. $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$ ist nach Theorem 3.1.1 eine komplexe Mannigfaltigkeit und daher auch orientierbar. Aus dem Satz von Massey (Theorem 1.2.6) folgt daher

$$H_q(\sum_{n,m}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\beta_q^{\mathbb{C}}(n,m)} := \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{\beta_q^{\mathbb{C}}(n,m)}.$$

Nach Lemma 1 gilt daher

$$H_q(\sum_{n,m}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\beta_q^{\mathbb{C}}(n,m)} = \mathbb{Z}^{l_q(n,m)} \cong H_q(G_{m-1,n+m-1}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}).$$



Man kann diese Berechnung der Homologiegruppen von $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$ benutzen, um eine interessante kombinatorische Identität zu beweisen; mir ist kein rein kombinatorischer Beweis des folgenden Lemmas bekannt. Die Dimensionsformeln (Lemma 3.2.1.1 und Lemma 3.2.2.5) lassen es erahnen, daß ein solcher Beweis kompliziert sein könnte.

Lemma 2 Für alle $q \geq 0$ ist

a) $b_q^{\mathbb{C}}(n, m) = \beta_q^{\mathbb{C}}(n, m)$.

b) $b_q^{\mathbb{R}}(n, m) = \beta_q^{\mathbb{R}}(n, m)$.

Beweis

Wegen der Formeln (1) , (3) folgt b) aus a) .

Nach Theorem 1 gilt für alle $q \geq 0$ die Isomorphie

$$H_q(\sum_{n,m}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\beta_q^{\mathbb{C}}(n,m)} .$$

Nach Theorem 3.2.1.2 und der Formel (2) bilden auch die Kronecker Zellen $\text{Kro}(K; \mathbb{C})$ eine endliche zelluläre Zerlegung von $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$ in Zellen gerader Dimension (bezüglich $\mathbb{R}!$) . Wieder können wir den Satz von Massey (Theorem 1.2. 6) auf die orientierbare Mannigfaltigkeit $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$ anwenden und erhalten eine zweite , unabhängige Berechnung der Homologiegruppen von $\sum_{n,m}(\mathbb{C})$. D.h. es gilt für alle $q \geq 0$:

$$H_q(\sum_{n,m}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_q^{\mathbb{C}}(n,m)} .$$

Daraus folgt aber $b_q^{\mathbb{C}}(n, m) = \beta_q^{\mathbb{C}}(n, m)$.



Bemerkung

Sei $(K_{n,m}, \preceq)$ die durch die Kronecker Ordnung (2.5.3) $\preceq$ halbgeordnete Menge aller Kombinationen $K \in K_{n,m}$. Aus Lemma 2.4.2.8 und Lemma 2 folgt dann:

$(K_{n,m}, \preceq)$ ist unimodal und Rang symmetrisch mit Rang $n(m-1)$.

Diese Aussage direkt kombinatorisch zu beweisen scheint sehr schwer zu sein .

Theorem 2 [33]

Die mod 2 singulären Homologiegruppen des Orbit Raumes $\sum_{n,m}(\mathbb{R})$ sind isomorph zu denen der Grassmann Mannigfaltigkeit $G_{n,n+m-1}(\mathbb{R})$:

$$H_q(\sum_{n,m}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \cong H_q(G_{n,n+m-1}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \quad \text{für alle } q \geq 0 .$$

Beweis

$G_{n,n+m-1}(\mathbb{R})$ ist diffeomorph zu $G_{m-1,n+m-1}(\mathbb{R})$. Daher ist für alle $q \geq 0$ $H_q(G_{n,n+m-1}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$ isomorph zu $H_q(G_{m-1,n+m-1}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$.

Die Schubert Zellen $S_o(a)$ von $G_{m-1,n+m-1}(\mathbb{R})$ der reellen Kodimension q sind charakterisiert durch (Milnor&Stasheff [44]):

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_1 \leq \dots \leq a_{m-1} \leq n \\ a_1 + \dots + a_{m-1} &= n(m-1) - q . \end{aligned}$$

Sei $l'_q(n,m)$ die Anzahl dieser Folgen $(a_1, \dots, a_{m-1}) \in \mathbb{Z}^{m-1}$. Aus Lemma 1 und (3) folgt:

$$l'_q(n,m) = \beta_q^{\mathbb{R}}(n,m) .$$

Die Homologiegruppen $H_q(G_{m-1,n+m-1}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$ sind wohlbekannt (siehe Milnor&Stasheff [44] oder 1.2) und für alle $q \geq 0$ gilt :

$$H_q(G_{m-1,n+m-1}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{l'_q(n,m)} = \mathbb{Z}_2^{\beta_q^{\mathbb{R}}(n,m)} .$$

Nach Theorem 3.2.1.2 bilden die Kronecker Zellen $Kr_o(K; \mathbb{R})$ eine endliche , analytische zelluläre Zerlegung des Orbit Raumes $\sum_{n,m}(\mathbb{R})$. Nach dem Satz von Borel und Haefliger (Theorem 1.2.3 , Theorem 1.2.3') gilt für alle $q \geq 0$ die Isomorphie

$$H_q(\sum_{n,m}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{b_q^{\mathbb{R}}(n,m)} .$$

Da nach Lemma 2 $b_q^{\mathbb{R}}(n,m) = \beta_q^{\mathbb{R}}(n,m)$ ist , folgt daraus Theorem 2 .

Sei $\text{Kro}(K;R)$ eine Kronecker Zelle von $\sum_{n,m}(R)$ mit

$$(*) \quad \dim_R \text{Kro}(K;R) = nm - q.$$

Borel und Haefliger haben gezeigt (siehe 1.2), daß die analytische Teilvarietät $\overline{\text{Kro}(K;R)}$ von $\sum_{n,m}(R)$ eine Kohomologieklassse

$$[\overline{\text{Kro}(K;R)}] \in H_c^{nm-q}(\sum_{n,m}(R); \mathbb{Z}_2)$$

bestimmt.

Nach dem Satz von Borel - Haefliger bilden diese Kohomologieklassen $[\overline{\text{Kro}(K;R)}]$, $K \in K_{n,m}$ mit $(*)$, sogar eine Basis des $\mathbb{Z}_2$ -Vektor-
raumes $H_c^{nm-q}(\sum_{n,m}(R); \mathbb{Z}_2)$.

In Analogie zum Schubert Kalkül im Grassmann Raum definieren wir:

Definition

Die Kohomologieklassse $[\overline{\text{Kro}(K;R)}]$ heißt ein Kronecker - Cozykel von $\sum_{n,m}(R)$ und die Poincaré duale Homologieklassse zu $[\overline{\text{Kro}(K;R)}]$ ein q - Kronecker Zykel von $\sum_{n,m}(R)$.

Zusammenfassend erhalten wir damit mit der Poincaré Dualität:

Theorem 3

Die q - Kronecker Zykeln von $\sum_{n,m}(R)$ bilden eine Basis von $H_q(\sum_{n,m}(R); \mathbb{Z}_2)$.



3.4 Homotopiegruppen von $\sum_{n,m}$

Sei $\pi_i(X)$ die i - te Homotopiegruppe eines topologischen Raumes X ; den entsprechenden Basispunkt $x_0 \in X$ notieren wir nicht extra mit.

In Abschnitt 2.7 (Theorem 2.7.2) haben wir für $m \geq 2$ bewiesen:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \left[\pi_i(\tilde{\sum}_{n,m}(R)) \cong 0 \quad \text{für } 0 \leq i \leq m-2 \right. \\ (b) \quad & \left. \pi_i(\tilde{\sum}_{n,m}(\mathbb{C})) \cong 0 \quad \text{für } 0 \leq i \leq 2m-2. \right] \end{aligned}$$

Ein sehr nützliches Hilfsmittel, um Homotopiegruppen der Basis B eines Faserbündels $F \rightarrow E \rightarrow B$ auszurechnen, ist die exakte Homotopiesequenz der Faserung $F \rightarrow E \rightarrow B$ (Bott, Tu [7]):

$$\dots \rightarrow \pi_i(F) \rightarrow \pi_i(E) \rightarrow \pi_i(B) \rightarrow \pi_{i-1}(F) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow \pi_0(E) \rightarrow \pi_0(B) \rightarrow 0.$$

Diese ist von Delchamps [18] zur Berechnung der Homotopiegruppen des Raumes multivariabler rationaler Transfermatrizen (siehe den nächsten Abschnitt) mit herangezogen worden.

Im Falle $F = GL_n(k)$, $E = \tilde{\Sigma}_{n,m}(k)$, $B = \Sigma_{n,m}(k)$ erhalten wir aus der exakten Homotopiesequenz für $m \geq 2$:

Theorem 1 Sei $m \geq 2$. Dann gelten die Isomorphismen

$$(1) \quad \pi_i(\Sigma_{n,m}(\mathbb{R})) \cong \pi_{i-1}(GL_n(\mathbb{R})) \quad \text{für } 1 \leq i \leq m-2, m \geq 3.$$

$$(2) \quad \pi_i(\Sigma_{n,m}(\mathbb{C})) \cong \pi_{i-1}(GL_n(\mathbb{C})) \quad \text{für } 1 \leq i \leq 2m-2.$$



Insbesondere für $m \geq 2$:

$$\pi_2(\Sigma_{n,m}(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}.$$



3.5 Topologie des Raumes rationaler Transfermatrizen

In diesem Abschnitt wenden wir die bisher erzielten Ergebnisse auf den Raum $\text{Rat}_{n,m,p}^{(k)}$ der proper rationalen Transfermatrizen mit m Inputs, p Outputs und McMillan Grad n an. Dieser Raum ist auch in der Dissertation von Delchamps [18] intensiv untersucht worden. Die hier angegebenen Sätze habe ich allerdings ohne Kenntnis von Delchamps Arbeit [18] gefunden; sie bestätigen von einem anderen Blickpunkt aus die Hauptresultate in [18].

Für $n, m, p \geq 1$ sei

$$\tilde{\Sigma}_{n,m,p}^{(k)} := \left\{ (A, B, C) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \times k^{p \times n} \mid (A, B) \text{ erreichbar} \right\}$$

und

$$\Sigma_{n,m,p}^{(k)} := \tilde{\Sigma}_{n,m,p}^{(k)} / \text{GL}_n(k)$$

der Orbit Raum der Ähnlichkeitsaktion $(A, B, C) \mapsto (SAS^{-1}, SB, CS^{-1})$ auf $\tilde{\Sigma}_{n,m,p}^{(k)}$; siehe 3.1.

Für $0 \leq r \leq n$ sei

$$\tilde{\Sigma}_{n,m,p}^r(k) := \left\{ (A, B, C) \in \tilde{\Sigma}_{n,m,p}^{(k)} \mid \text{rg}(C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T) = r \right\}$$

und $\tilde{\text{Rat}}_{n,m,p}^{(k)} := \tilde{\Sigma}_{n,m,p}^n(k)$.

$\tilde{\text{Rat}}_{n,m,p}^{(k)}$ ist dann die Menge aller Matrizentripel (A, B, C) , so daß (A, B) erreichbar und (A, C) beobachtbar ist.

Lemma 1

$\tilde{\Sigma}_{n,m,p}^r(k)$ ist eine analytische Untermannigfaltigkeit von $\tilde{\Sigma}_{n,m,p}^{(k)}$ der reellen Kodimension

$$\begin{cases} (n-r)p & \text{für } k = \mathbb{R}, \\ 2(n-r)p & \text{für } k = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Beweis

Sei $\tilde{\Sigma}_{n,m,p}^r(k)$ die Menge aller Tripel $(A, B, C) \in k^{n \times n} \times k^{n \times m} \times k^{p \times n}$ mit

$$\text{rg}(C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T) = r.$$

Nach Theorem 2.6.1 ist $\hat{S}_{n,m,p}^r(k)$ eine analytische Untermannigfaltigkeit von $k^{n \times n} \times k^{n \times m} \times k^{p \times n}$ der Dimension

$$\dim_k \hat{S}_{n,m,p}^r(k) = n^2 + nm + rp .$$

Also ist

$$\tilde{S}_{n,m,p}^r(k) = \sum_{n,m,p} \tilde{S}_{n,m,p}^r(k) \cap \hat{S}_{n,m,p}^r(k)$$

eine analytische Untermannigfaltigkeit der offenen Menge $\sum_{n,m,p} \tilde{S}_{n,m,p}^r(k)$ der reellen Kodimension

$$\begin{cases} np - rp & \text{für } k = \mathbb{R} \\ 2np - 2rp & \text{für } k = \mathbb{C} . \end{cases}$$



Nach Lemma 1 ist

$$\tilde{S} := \bigcup_{r=0}^{n-1} \tilde{S}_{n,m,p}^r(k)$$

eine abgeschlossene analytische Teilvarietät der reellen Kodimension

$$\text{codim } \tilde{S} = \begin{cases} p & \text{für } k = \mathbb{R} \\ 2p & \text{für } k = \mathbb{C} . \end{cases}$$

$$\text{mit } \tilde{\text{Rat}}_{n,m,p}(k) = \sum_{n,m,p} \tilde{S}_{n,m,p}^r(k) - \tilde{S} .$$

Nach 3.1 operiert die Ähnlichkeitsaktion $(A,B,C) \mapsto (SAS^{-1}, SB, CS^{-1})$ auf $\sum_{n,m,p} \tilde{S}_{n,m,p}^r(k)$, also auch auf $\tilde{S}_{n,m,p}^r(k)$ frei und mit abgeschlossenem Graphen . Daher sind die entsprechenden Orbiträume

$$S_{n,m,p}^r(k) := \tilde{S}_{n,m,p}^r(k) / GL_n(k) ,$$

$$\text{Rat}_{n,m,p}(k) := \tilde{\text{Rat}}_{n,m,p}(k) / GL_n(k)$$

analytische Untermannigfaltigkeiten von $\sum_{n,m,p} \tilde{S}_{n,m,p}^r(k)$. $\text{Rat}_{n,m,p}(k)$ ist offen und dicht in $\sum_{n,m,p} \tilde{S}_{n,m,p}^r(k)$ und $S_{n,m,p}^r(k)$ hat die reelle

Kodimension

$$d_r := \text{codim } S_{n,m,p}^r(k) = \begin{cases} (n-r)p & \text{für } k = \mathbb{R} \\ 2(n-r)p & \text{für } k = \mathbb{C} \end{cases}.$$

Die Menge

$$S := \tilde{S}/\text{GL}_n(k) = \sum_{n,m,p}(k) - \text{Rat}_{n,m,p}(k)$$

ist eine analytische Teilvarietät in $\sum_{n,m,p}(k)$, ist abgeschlossen und hat die reelle Kodimension

$$d := \text{codim } S := \min_{0 \leq r < n} \text{codim } S_{n,m,p}^r(k) = \begin{cases} p & \text{für } k = \mathbb{R} \\ 2p & \text{für } k = \mathbb{C} \end{cases}.$$

Da $\sum_{n,m}(k)$ ein Deformationsretrakt von $\sum_{n,m,p}(k)$ ist (3.1), folgt aus den Lemmata 1.3.1, 1.3.2:

Theorem 1 Sei $p \geq 2$ und R ein Koeffizientenring. Dann gilt

- 1) $\pi_i(\text{Rat}_{n,m,p}(\mathbb{R})) \cong \pi_i(\sum_{n,m}(\mathbb{R}))$ für $0 \leq i \leq p-2$
- 2) $\pi_i(\text{Rat}_{n,m,p}(\mathbb{C})) \cong \pi_i(\sum_{n,m}(\mathbb{C}))$ für $0 \leq i \leq 2p-2$
- 3) $H_i(\text{Rat}_{n,m,p}(\mathbb{R}); R) \cong H_i(\sum_{n,m}(\mathbb{R}); R)$ für $0 \leq i \leq p-2$
- 4) $H_i(\text{Rat}_{n,m,p}(\mathbb{C}); R) \cong H_i(\sum_{n,m}(\mathbb{C}); R)$ für $0 \leq i \leq 2p-2$.



Insbesondere gilt für alle $n \geq 1, m \geq 2, p \geq 2$ der Isomorphismus

$$\pi_2(\text{Rat}_{n,m,p}(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$$

nach Theorem 3.4.1.

Aus Theorem 1 und den Theoremen 3.3.1, 3.3.2 folgt wiederum

Theorem 2 Für $p \geq 2$ gelten die Isomorphismen

- 1) $H_i(\text{Rat}_{n,m,p}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \cong H_i(G_{n,n+m-1}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$ für $0 \leq i \leq p-2$
- 2) $H_i(\text{Rat}_{n,m,p}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \cong H_i(G_{n,n+m-1}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ für $0 \leq i \leq 2p-2$.



Delchamps [18] hat gezeigt, daß für jeden Koeffizientenring R und $\min(m, p) \geq 2$ es Isomorphismen der Homologiegruppen gibt

$$H_i(\text{Rat}_{n,m,p}(\mathbb{R}); R) \cong \begin{cases} H_i(G_{n,nm}(\mathbb{R}); R) & \text{für } 0 \leq i \leq \min(m, p) - 2 \\ H_i(G_{n,np}(\mathbb{R}); R) & \end{cases}$$

und

$$H_i(\text{Rat}_{n,m,p}(\mathbb{C}); R) \cong \begin{cases} H_i(G_{n,nm}(\mathbb{C}); R) & \text{für } 0 \leq i \leq 2 \min(m, p) - 2 \\ H_i(G_{n,np}(\mathbb{C}); R) & \end{cases}$$

Da für alle $0 \leq i \leq \min(m, p) - 2$ die Isomorphismen

$$H_i(G_{n,n+m-1}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \cong H_i(G_{n,nm}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2) \cong H_i(G_{n,np}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)$$

bestehen, ist Delchamps Berechnung in Harmonie mit der hier gegebenen.

Bemerkung

Nach dem Hauptsatz der Realisierungstheorie linearer zeitinvarianter endlich dimensionaler Systeme, vgl. Byrnes/Duncan [14] oder Kalman [39], gibt es eine bijektive Abbildung zwischen Orbits $[A, B, C] \in \text{Rat}_{n,m,p}^{(k)}$ vollständig erreichbarer und beobachtbarer Systeme

$$(\sum) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

und strikt proper rationalen Matrixfunktionen $G(\cdot) \in k(s)^{p \times m}$ mit McMillan Grad n . Diese Abbildung ist gegeben durch

$$[A, B, C] \mapsto G(s) := C(sI - A)^{-1}B, \quad s \in \mathbb{C} - \text{Spec}(A).$$

$G(s)$ heißt die Transfermatrix des Systems $(\sum)$ und $\text{Rat}_{n,m,p}^{(k)}$ der Raum der rationalen Transformmatrizen mit m Inputs und p Outputs und

Anhang: Nichtexistenz stetiger kanonischer Formen

Wir beziehen uns hier auf die Seiten 112 ff. Um das Theorem 3.1.3 auf Seite 114 zu beweisen, kann man z.B. so vorgehen:

Sei $k = \mathbb{R}$. $R: \sum_{n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow G_{n,(n+1)m}(\mathbb{R})$ bezeichne die Kalman Einbettung und $i: G_{r,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \sum_{n,m}(\mathbb{R})$ die Einbettung aus Lemma 2, S.112.

Seien $U_{r,m}$ bzw. $U_{n,(n+1)m}$ die universellen Vektorraumbündel auf $G_{r,m}(\mathbb{R})$ bzw. $G_{n,(n+1)m}(\mathbb{R})$. Man überzeugt sich leicht, daß die Hauptfaserbündel

$$p: V_{r,m}(\mathbb{R}) \rightarrow G_{r,m}(\mathbb{R}) \quad \text{bzw.} \quad \hat{p}: \tilde{\sum}_{n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow \sum_{n,m}(\mathbb{R})$$

genau dann trivial sind, wenn die zugehörigen Vektorraumbündel

$$U_{r,m} \rightarrow G_{r,m}(\mathbb{R}) \quad \text{bzw.} \quad R^!(U_{n,(n+1)m}) \rightarrow \sum_{n,m}(\mathbb{R})$$

trivial sind.

Angenommen, $R^!(U_{n,(n+1)m})$ ist trivial über $\sum_{n,m}(\mathbb{R})$ für $m \geq 2$.

Dann verschwinden auch die zugehörigen Stiefel - Whitney Klassen:

$$x_q := w_q(R^!(U_{n,(n+1)m})) = 0 \quad \text{für} \quad q \geq 1.$$

Nach Seite 119 ist aber $i^*(x_q) = w_q(U_{r,m})$; Widerspruch.

Den Fall $k = \mathbb{C}$ kann man ganz analog unter Benutzung der Chernschen Klassen erledigen.

Eine ganz ähnliche Beweisidee stammt von Delchamps [18] und benutzt den Begriff der Kategorie eines Hauptfaserbündels.

Definition: Die Kategorie $c(E)$ eines Hauptfaserbündels $E \rightarrow B$ ist die Anzahl $\text{card } I$ der kleinsten offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von B , die $E \rightarrow B$ trivialisiert.

Offenbar gilt:

$$\boxed{E \rightarrow B \text{ nicht trivial, genau wenn } c(E) \geq 2.}$$

Die (mod 2) cup - Länge $\text{cup}(X)$ eines topologischen Raumes X ist die Länge des längsten nichtverschwindenden Monoms in der $\mathbb{Z}_2$ - Algebra $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, d.h. wenn $x_1 \cup \dots \cup x_n \neq 0$, dann $\text{cup}(X) \geq n$.

Abschätzungen für die cup - Länge von $G_{k,n+k}(\mathbb{R})$ sind wohlbekannt, so findet man z.B. in Hiller ("On the cohomology of real Grassmannians", Trans. Amer. Math. Soc. 257 (1980) 521 - 533) die Abschätzung

$$\text{cup}(G_{k,n+k}(\mathbb{R})) \geq 2^{\lfloor \log_2(n+k) \rfloor} - 2$$

insbesondere also

$$\text{cup}(G_{k,n+k}(\mathbb{R})) \geq n + k - 2.$$

Nach einem Satz von Eilenberg (siehe Hiller oder Delchamps [18]) gilt die Abschätzung $c(E) \geq r_0 + 1$ mit

$$r_0 := \max \{ r \mid x_1 \cup \dots \cup x_r \neq 0, x_i \in f^*(H^*(G_{k,n}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}_2)) \},$$

wenn $f: B \rightarrow G_{k,n}(\mathbb{R})$ eine klassifizierende Abbildung von $E \rightarrow B$ ist.

Lemma $\text{cat}(\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})) \geq m - 1$ für $\min(m,n) \geq 2$.

Beweis Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie oben. Mit

$$x_i := R^*(w_i(U_{n,(n+1)m})) \text{ ist } i^*(x_q) = w_q(U_{r,m}), 1 \leq r < \min(m,n),$$

und daher folgt aus $w_{q_1} \cup \dots \cup w_{q_r} \neq 0$, daß $x_{q_1} \cup \dots \cup x_{q_r} \neq 0$.

Also gilt

$$\text{cat}(\tilde{\Sigma}_{n,m}(\mathbb{R})) \geq r_0 + 1 \geq \text{cup}(G_{r,m}(\mathbb{R})) + 1 \geq m - 2 + 1 = m - 1. \quad \checkmark$$

Daraus folgt aber sofort Theorem 3.1.3 für $m \geq 3$. Für $m = 2$ ist man aber gezwungen, die obigen Abschätzungen zu verschärfen.

Literatur

- [1] : J.Adams,P.Griffiths: Topics in algebraic and analytic geometry , Princeton Univ. Press , Princeton 1974
- [2] : M.Aigner: Combinatorial theory , Grundlehren der math. Wissenschaften 234 , Springer . 1979
- [3] : J.Allard: Sums of stably trivial vector bundles , Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87 (1980), 97 - 107
- [4] : G.E.Andrews: The theory of partitions , Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 2, G.C.Rota(ed.), Addison-Wesley Publ. Comp., Reading 1976
- [5] : A.Borel,A.Haeffliger: La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique , Bull. Soc. math. France , 89 (1961), 461 - 513
- [6] : A.Borel,J.C.Moore: Homology theory for locally compact spaces , Mich. math. J. , 7 (1960), 137 - 159
- [7] : R.Bott,L.W.Tu: Differential forms in algebraic topology , Graduate Texts in Mathematics 82 , Springer 1982
- [8] : G.E.Bredon: Sheaf theory , McGraw - Hill Book Company , New York-1967
- [9] : R.Brockett: Some geometric questions in the theory of linear systems , IEEE Trans. Autom. Control AC - 21 4 (1976) 449 - 455
- [10] : R.Brockett: The geometry of the set of controllable linear systems , Research Reports of Autom. Control Lab., Fac. of Eng.,Nagoya Univ.,Vol. 24 (1977), 1 - 7

- [11] : C.I.Byrnes: The moduli space for linear dynamical systems ,
1976 Ames Conference on Geometric Control Theory, Math. Sci.
Press 1976, R.Hermann, C.Martin (ed.), p. 229 - 279
- [12] : C.I.Byrnes: Algebraic and geometric aspects of the analysis
of feedback systems , Geometrical Methods for the Theory
of Linear Systems , C.I.Byrnes, C.F.Martin (ed.) , D. Reidel
Publ. Company , Dordrecht 1980 , p. 85 - 124
- [13] : C.I.Byrnes,D.F.Delchamps: Critical point behavior of objective
functions defined on spaces of multivariable systems ,
Proc. 21st IEEE Conference on Decision and Control , Florida ,
1982, erscheint demnächst
- [14] : C.I.Byrnes,T.Duncan: On certain topological invariants arising
in system theory , New Directions in Applied Mathematics ,
P.Hilton, G.Young (ed.) , New York Springer - Verlag 1981
p. 29 - 71
- [15] : C.I.Byrnes,N.Hurt: On the moduli of linear dynamical systems ,
Adv. in Math. Studies in Analysis, Vol. 4 (1979), 83 - 122
- [16] : C.I.Byrnes,M.Gauger: Decidability criteria for the similarity
problem, with applications to the moduli of linear dynamical
systems , Adv. in Math. 25 (1977), 59 - 90
- [17] : J.M.C.Clark: The consistent selection of local coordinates
in linear system identification , Proceedings of the Joint
Automatic Control Conference (1976), 567 - 580
- [18] : D.F.Delchamps: The geometry of spaces of linear systems with
an application to the identification problem , Ph.D. Thesis
Harvard University , 1982

- [19] : M.Denham: Canonical forms for the identification of multi - variable linear systems , IEEE Trans. on Autom. Control, AC 19 (1974), 646 - 655
- [20] : J.Dieudonné: Foundations of modern analysis , Vol. 3 , Academic Press 1972
- [21] : C.G.Gibson: Singular points of smooth mappings , Research Notes in Mathematics , Pitman , London 1979
- [22] : C.G.Gibson,K.Wirthmüller,A.A.du Plessis,E.J.N.Looijenga: Topological stability of smooth mappings , Lecture Notes in Mathematics 552 , Springer , Berlin 1977
- [23] : V.Guillemin,A.Pollack: Differential topology , Prentice Hall 1974
- [24] : M.J.Greenberg: Lectures on algebraic topology , W.A.Benjamin Inc. Reading, Mass. 1977
- [25] : B.Hanzon,M.Hazewinkel: On identification of linear systems and the estimation Lie - Algebra of the associated nonlinear filtering problem , preprint 1981
- [26] : M.Hazewinkel: Moduli and canonical forms for linear dynamical systems II: The topological case , Mathematical Systems Theory 10 (1977), 363 - 385
- [27] : M.Hazewinkel: (Fine) moduli (spaces) for linear systems: What are they and what are they good for? , Geometrical Methods for the Theory of Linear Systems , C.I.Byrnes, C.F.Martin (ed.), D.Reidel , Dordrecht 1980 , p. 125 - 193
- [28] : M.Hazewinkel,C.Martin: Representations of the symmetric group the specialization order, systems and Grassmann manifolds preprint 1980

- [29] : M.Hazewinkel,R.Kalman: Moduli and canonical forms for linear dynamical systems, report 7504, Econometric Inst.,Erasmus Univ. Rotterdam 1974
- [30] : M.Hazewinkel,R.Kalman: On invariants, canonical forms and moduli for linear, constant, finite - dimensional , dynamical systems , Lecture Notes in Econ.-Math. System Theory 131 Springer , New York 1976 , p. 48 - 60
- [31] : U.Helmke: A cell decomposition for the orbit space of the similarity action , Report 65 , Forschungsschwerpunkt 'Dynamische Systeme' ,Universität Bremen 1982
- [32] : U.Helmke: A cell decomposition for the orbit space of the similarity action , Proceedings of the conference "Developpement et utilisation d'outils et modeles mathematiques en automatique, analyse de systemes et traitement du signal" Belle Ile 1982
- [33] : U.Helmke: The topology of the space of linear systems , erscheint in Proc. 21st IEEE Conference on Decision and Control , Florida 1982
- [34] : H.Hiller: Combinatorics and intersections of Schubert varieties Comment. Math. Helvetici 57 (1982), 41 - 59
- [35] : D.Hinrichsen,D.Prätzel-Wolters: Generalized Hermite matrices and complete invariants of strict system equivalence , Report 30, Forschungsschwerpunkt 'Dynamische Systeme' , Universität Bremen. 1981
- [36] : M.W.Hirsch: Differential topology , Graduate Texts in Math. 33, Springer - Verlag, New York 1976

- [37] : S.T.Hu: Homotopy theory , Academic Press, New York 1959
- [38] : I.James: The topology of Stiefel manifolds , London
Mathematical Society, Lect. Notes Series 24 , Cambridge
University Press 1976
- [39] : R.Kalman: Mathematical description of linear dynamical
systems , SIAM J. Control 1 (1963), 128 - 151
- [40] : R.Kalman: Algebraic - geometric description of the class of
linear systems of constant dimension , Proc. 8th Annual
Princeton Conf. on Information Sciences and Systemes (1974),
189 - 191
- [41] : W.Massey: Homology and cohomology theory , Marcel Dekker ,
New York 1978
- [42] : D.Q.Mayne: A canonical model for identification of multi -
variable systems , IEEE Trans. Autom. Control Vol. AC-17
(1972), 728 - 729
- [43] : J.Milnor: Singular points of complex hypersurfaces ,
Ann. of Math. Studies 61 , Princeton University Press,
Princeton N.Y. 1968
- [44] : J.Milnor,J.Stasheff: Characteristic classes , Princeton
University Press , 1974
- [45] : H.F.Münzner,D.Prätzel-Wolters: Minimal bases of polynomial
modules, structural indices and Brunovsky - transformations
Int. J. Control 30 (1979), 291 - 318

- [46] : H.F.Münzner: Zur Kombinatorik der Kombinationen , unver-
öffentlichtes Manuskript , Bremen 1982
- [47] : V.M.Popov: Invariant description of linear time - invariant
controllable systems , SIAM J. Control , 10 (1972), 252 -
264
- [48] : R.Remmert,K.Stein: Über die wesentlichen Singularitäten
analytischer Mengen , Math. Annalen 126 (1953), 263 - 306
- [49] : J.Rissanen: Basis of invariants and canonical forms for
linear dynamical systems , Automatica 10 (1974), 175 -
182
- [50] : G.Segal: The topology of spaces of rational functions ,
Acta Mathematica 143 (1979), 39 - 72
- [51] : S.Smale: On gradient dynamical systems , Annals of Math.
74 (1961), 199 - 206
- [52] : E.H.Spanier: Algebraic topology , McGraw - Hill , New York
1966
- [53] : W.Stoll: Invariant forms on Grassmann manifolds , Annals
of Math. Studies 89 , Princeton University Press 1977
- [54] : A.Tannenbaum: Invariance and system theory: Algebraic and
geometric aspects , Lecture Notes in Mathematics 845 ,
Springer - Verlag Berlin 1981
- [55] : S.H.Wang,E.J.Davison: Canonical forms of linear multivariable
systems , SIAM J. Control 14 (1976), 236 - 250
- [56] : R.O.Wells: Differential analysis on complex manifolds ,
Graduate Texts in Mathematics 65 , Springer - Verlag 1980

- [57] : H. Whitney: Complex analytic varieties , Addison - Wesley
Publ. Company, Reading, Mass. 1972
- [58] : M.W. Wonham: Linear multivariable control: A geometric approach
Lect. Notes Economics and Math. Systems , 101 Springer 1974
- [59] : M. Zisman: Travaux de Borel - Haefliger - Moore ,
Séminaire Bourbaki 240 (1961/62), 240 -01 - 240 - 09

